



UNIVERSIDADE DA CORUÑA



Escola Politécnica Superior

Trabajo Fin de Grado
CURSO 2018/19

*EVALUACIÓN DE MÉTODOS DE CO-SIMULACIÓN
PARA SISTEMAS CON COMPONENTES MECÁNICOS*

Grado en Ingeniería Mecánica

ALUMNO

Christian Díaz Carro

TUTORES

Miguel Ángel Naya Villaverde

Francisco Javier González Varela

FECHA

JULIO 2019

EVALUACIÓN DE MÉTODOS DE CO-SIMULACIÓN PARA SISTEMAS CON COMPONENTES MECÁNICOS

La co-simulación aplicada en el ámbito industrial reduce los costes y el tiempo requeridos en los procesos de fabricación. También se utiliza para mantener la confidencialidad en proyectos en los que intervienen múltiples entidades. Además de en la simulación industrial, la co-simulación se utiliza en otros ámbitos como el de la medicina, los videojuegos y los dispositivos hápticos.

Este trabajo de fin de grado representa una nueva contribución a las distintas investigaciones sobre co-simulación existentes en la literatura. En él se ha estudiado la precisión y estabilidad de distintos métodos de co-simulación aplicados a la simulación de sistemas de ingeniería con componentes mecánicos. Con este estudio se han determinado algunos principios generales para configurar adecuadamente los parámetros de la co-simulación en casos prácticos.

Para llevar a cabo el estudio se han utilizado dos ejemplos provenientes de la literatura de co-simulación de sistemas mecánicos: el oscilador lineal de dos grados de libertad y un manipulador, también de dos grados de libertad, controlado con actuadores hidráulicos. Se ha escrito el código de simulación requerido en MATLAB y se han comparado los resultados proporcionados por distintos métodos de co-simulación, atendiendo a su capacidad para mantener la simulación lo más precisa posible.

AVALIACIÓN DE MÉTODOS DE CO-SIMULACIÓN PARA SISTEMAS CON COMPONENTES MECÁNICOS

A co-simulación aplicada no ámbito industrial reduce os custos e o tempo que se precisan nos procesos de fabricación. Tamén pode usarse para manter a confidencialidade en proxectos nos que interveñen múltiples entidades. Amais de na simulación industrial, a co-simulación emprégase noutros eidos coma a medicina, os videoxogos e os dispositivos hápticos.

Este traballo de fin de grado representa unha nova contribución ás distintas investigacións sobre co-simulación existentes na literatura. Nel estudouse a precisión e estabilidade de distintos métodos de co-simulación aplicados á simulación de sistemas de enxeñaría con compoñentes mecánicos. Neste estudo determináronse algúns principios xerais para configurar adecuadamente os parámetros da co-simulación en casos prácticos.

Para levar a cabo o estudo foron usados dous exemplos moi comúns na literatura de co-simulación de sistemas mecánicos: un oscilador lineal de dous graos de liberdade e un manipulador, tamén de dous graos de liberdade, controlado con actuadores hidráulicos. Escribiuse o código de simulación precisado en MATLAB e comparáronse os resultados proporcionados por distintos métodos de co-simulación, con especial énfase na súa capacidade para manter la simulación o mais precisa posible.

ASSESSMENT OF CO-SIMULATION METHODS FOR SYSTEMS WITH MECHANICAL COMPONENTS

The use of co-simulation in industrial environments decreases the cost and time required in manufacturing processes. This technique can also be used to maintain confidentiality in projects in which many partners are involved. Besides industrial simulation, co-simulation is also employed in other fields such as medicine, videogames, and haptic devices.

This graduation project represents a novel contribution to the research on co-simulation that can be found in the scientific literature. The project has dealt with the study of the accuracy and stability properties of several co-simulation strategies when applied to the simulation of engineering systems with mechanical components. General purpose guidelines were determined regarding how to conduct configuration of co-simulation parameters in practical applications.

The study was carried out using two test examples from the literature on co-simulation of mechanical systems, namely a two-degree-of-freedom linear oscillator and a hydraulically actuated manipulator, also featuring two degrees of freedom. The code required to conduct the simulation of the examples was written in MATLAB and the results obtained using different co-simulation strategies were compared in terms of their ability to keep the co-simulation as accurate and stable as possible.



UNIVERSIDADE DA CORUÑA



Escola Politécnica Superior

TRABAJO FIN DE GRADO

CURSO 2018/19

*EVALUACIÓN DE MÉTODOS DE CO-SIMULACIÓN
PARA SISTEMAS CON COMPONENTES MECÁNICOS*

Grado en Ingeniería Mecánica

Documento

MEMORIA

ÍNDICE

1	Introducción	7
1.1	Motivación	9
1.2	Antecedentes.....	10
1.3	Objetivo	11
2	Configuración de la co-simulación.....	12
2.1	Esquemas no iterativos de co-simulación	12
2.1.1	Esquema de co-simulación de Jacobi.....	13
2.1.2	Esquema de co-simulación de Gauss-Seidel.....	13
2.2	Malla de intervalos de tiempo	14
2.2.1	Co-simulación single-rate	15
2.2.2	Co-simulación multi-rate	15
2.3	Selección de las variables de acoplamiento.....	16
2.4	Extrapolación e interpolación	19
3	Sistemas estudiados	22
3.1	Oscilador lineal de dos grados de libertad (OLDGDL).....	22
3.1.1	Acoplamiento Fuerza-Desplazamiento (f-d)	23
3.1.2	Acoplamiento Desplazamiento-Desplazamiento (d-d).....	24
3.2	Grúa Hidráulica.....	25
4	Resultados	30
4.1	Oscilador lineal de dos grados de libertad (OLDGL)	30
4.2	Grúa hidráulica	39
5	Conclusiones	47
6	Bibliografía.....	49

1 INTRODUCCIÓN

En el ámbito industrial la simulación computacional se usa para reducir los costes y el tiempo requeridos en los procesos de fabricación, así como para acortar el ciclo de desarrollo del producto. La simulación por ordenador de sistemas mecánicos comenzó a tener aplicación práctica en la industria y la investigación en los años setenta del siglo pasado. Desde entonces, el incremento en la capacidad de cálculo de los ordenadores, en combinación con las mejoras en métodos y algoritmos, han permitido la simulación de sistemas mecánicos de gran complejidad, incluyendo efectos como la flexibilidad y el contacto, de forma muy eficiente, siendo capaces en muchos casos de proporcionar resultados en tiempo real. En nuestros días, sin embargo, la complejidad de las aplicaciones a menudo hace que sea necesario considerar la interacción de los sistemas mecánicos con otros componentes de diferente naturaleza, tanto en lo que se refiere a comportamiento físico como a sus escalas de tiempo. Éste es el caso de sistemas mecánicos que incluyen componentes hidráulicos o electrónicos. La co-simulación es una técnica cada vez más importante para formular y resolver la dinámica de estas interacciones entre sistemas que son físicamente distintos.

El modelado y la simulación de sistemas multifísicos pueden abordarse de varias maneras que, en general, pueden agruparse en dos grandes alternativas. Una posibilidad es definir un conjunto de ecuaciones que abarcan la dinámica del sistema completo y describen el comportamiento de todos sus componentes. Esto se denomina *simulación monolítica* Figura 1. Otra opción es la *co-simulación*, que permite una mayor adaptabilidad a los requisitos y escalas de tiempo de cada subsistema.



Figura 1. Esquema de una simulación monolítica.

La co-simulación, o acoplamiento de solvers, divide el sistema global que se quiere simular en distintos subsistemas [1]. Cada uno de estos subsistemas posee su propio integrador e integra de forma independiente sus ecuaciones dinámicas. Para sincronizar la integración de cada uno de los subsistemas se realiza un intercambio de distintas variables de acoplamiento (inputs “ u ” y outputs “ y ” de cada subsistema). Estas variables son intercambiadas en momentos puntuales de comunicación, de forma que cada subsistema no dispone de información sobre la evolución del resto del sistema entre dos puntos de comunicación consecutivos. Normalmente, la coordinación de la integración de los distintos subsistemas está a cargo de una herramienta de software que se conoce como *manager* o *master* de co-simulación (Figura 2).

La co-simulación es modular, permite ajustar las ecuaciones dinámicas y los métodos que se utilizarán para resolverlas e integrarlas a la naturaleza concreta de cada componente a simular. Además, permite integrar cada uno de los subsistemas con su escala de tiempo particular, lo cual es una ventaja frente a la simulación monolítica. La solución monolítica está obligada a realizar la integración con la escala de tiempo del subsistema que requiere un paso

de tiempo menor y esto implica, potencialmente, desaprovechar recursos de cálculo en otros subsistemas que no requieren escalas de tiempo tan exigentes.

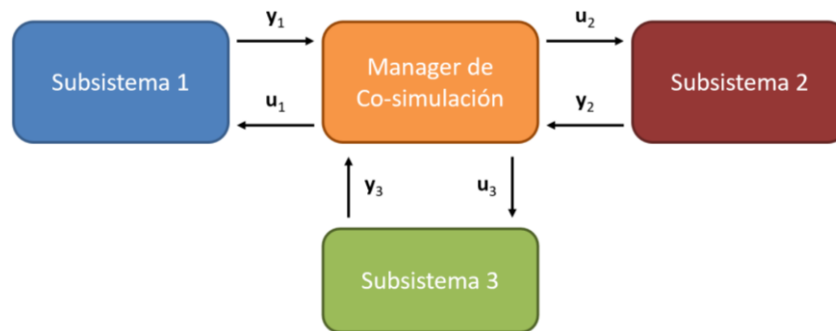


Figura 2. Ejemplo de esquema de co-simulación.

Además, algunos esquemas de co-simulación permiten ejecutar en paralelo la integración de cada uno de los subsistemas, lo que reduce el tiempo transcurrido en los cálculos del sistema completo. Ejecutando la integración de los subsistemas en paralelo se pueden distribuir los recursos de cálculo entre distintos núcleos de un mismo ordenador, o incluso entre varias unidades de procesamiento conectadas en red. La integración numérica (o cálculos) de los subsistemas se coordina a través del intercambio, a través de una interfaz discreta, de *variables de acoplamiento* que introducen información en un subsistema sobre la situación de su entorno (*inputs*) o recogen información de un subsistema para compartirla con el resto de elementos de la simulación (*outputs*). El intercambio de estas variables de acoplamiento se da de forma discreta en el tiempo, es decir, se produce sólo en ciertos instantes de comunicación. La integración de cada subsistema prosigue de modo independiente, sin información adicional sobre lo que ocurre en su entorno, el resto del tiempo.

Además de lo anterior, mediante el uso de la co-simulación se puede también mantener la confidencialidad de las empresas. En el caso de que fuera necesario incluir el modelo de una pieza de un fabricante especializado en un entorno de co-simulación, se le podría pedir a éste que lo proporcionase en forma de un subsistema con unas variables de acoplamiento conocidas, pero con sus ecuaciones y parámetros internos ocultos al exterior. De esta manera no se pedirían al fabricante datos confidenciales del producto, y éste debería proporcionar tan sólo una caja negra en la que tan sólo la interfaz con el resto del sistema debe ser conocida. Dicha caja negra describe el comportamiento final del producto confidencial, que es lo realmente importante desde el punto de vista de la simulación, sin entregar ningún detalle sobre sus propiedades o comportamiento internos.

Más allá de la simulación puramente virtual, la co-simulación tiene un campo de aplicación en el entorno de los dispositivos hápticos. Estos dispositivos permiten la interacción del usuario con un entorno virtual simulado por ordenador: el usuario proporciona un desplazamiento y recibe como respuesta la fuerza del entorno virtual. Mediante el uso de éstos, se puede percibir la presencia de objetos tridimensionales en un ambiente virtual.

Estos dispositivos mencionados se pueden utilizar para aplicaciones muy importantes como puede ser una operación quirúrgica a distancia. Esta aplicación que se utiliza de ejemplo deja ver la importancia de la co-simulación y del método que se utilice en la programación de esta. La retroalimentación que debe tener el usuario de dicho dispositivo debe ser precisa e instantánea: un comportamiento impreciso o retardado podría generar problemas graves en dicha intervención. Igual que en este caso, muchas aplicaciones requieren una simulación en tiempo real, a la vez que proporcionan resultados precisos.

Este tipo de aplicaciones van en aumento en distintos sectores, como son el de la salud, el de los videojuegos o el de realidad virtual en distintos ámbitos. Junto con esto, también van en aumento las expectativas que se tienen en cuanto a lo que puede alcanzar la co-simulación

y sus distintas técnicas de programación para poder lograr el objetivo deseado lo antes posible. La existencia de proyectos de ámbito europeo sobre este tema (por ejemplo, ACOSAR, centrado en el desarrollo de estándares para la integración de componentes físicos en entornos de co-simulación) y el interés de las empresas de manufactura y software en definir estándares de co-simulación (como es el caso del estándar FMI) ponen de relieve el interés de la co-simulación para la comunidad investigadora e industrial en nuestros días.

El uso de la co-simulación tiene muchas ventajas, pero no es sencillo encontrar un método general adecuado para todas las aplicaciones posibles. Uno de los inconvenientes que posee la co-simulación se debe a que el intercambio de información a través de una interfaz temporal discreta da lugar a errores de acoplamiento, tales como retrasos en la recepción de las variables de acoplamiento y errores de discretización. Estos errores pueden degradar la precisión de la integración y, en algunos casos, hacerla inestable. Es importante mencionar que en la simulación la estabilidad y la precisión no están necesariamente relacionadas de modo directo: una simulación puede ser estable y al mismo tiempo no ser precisa, por ejemplo porque el acoplamiento discreto entre subsistemas introduce una disipación numérica en la simulación, lo que disminuye la energía del sistema de forma artificial. En la literatura de ingeniería mecánica existe un número considerable de publicaciones que abordan el estudio de la estabilidad de sistemas co-simulados [2] o de la convergencia teórica de su error numérico [3]. Por el contrario, el efecto de la co-simulación sobre la precisión de los resultados de simulación ha recibido menos atención [4].

En sistemas formados por componentes de distinta naturaleza, es importante encontrar métodos de co-simulación que garanticen la estabilidad y precisión de los resultados. Una solución deficiente, aunque fuese estable, estaría alejada del comportamiento real del sistema y perdería su valor como herramienta predictiva. En el trabajo presentado en esta memoria, se han estudiado distintas técnicas de co-simulación aplicadas a sistemas con componentes mecánicos, con el objetivo de determinar su impacto sobre la corrección de los resultados. Además de la comparación de los diversos métodos, el presente trabajo proporciona también una justificación del comportamiento de las distintas estrategias de co-simulación observado durante los experimentos numéricos que se llevaron a cabo.

1.1 Motivación

Tal y como se mencionó en el inicio de este capítulo, en la industria es cada vez más importante el ahorro de tiempo y costes, manteniendo una buena calidad del producto. La simulación por ordenador es una herramienta de gran utilidad para lograr estos tipos de ahorro mencionados. Al necesitar una pieza para un dispositivo, gracias a una correcta aplicación de la simulación se pueden obtener las características óptimas que debe tener dicho componente. Así se lograría ahorrar el tiempo de realizar prototipos y el coste de los componentes con los que se realizan las pruebas.

La simulación por ordenador del comportamiento de sistemas físicos tiene numerosos campos de aplicación; existen también un gran número de métodos y técnicas de implementación para llevarla a cabo. En el ámbito de la co-simulación existen también distintas maneras de abordar un mismo problema; cada uno de estos métodos tiene distintas propiedades y efectos sobre los resultados finales obtenidos. Además, Por ejemplo, es posible integrar todos los subsistemas en un conjunto usando el mismo paso de tiempo (*co-simulación single-rate*) o ajustando el paso de tiempo a la dinámica particular de cada uno de ellos (*co-simulación multi-rate*). Existen varias posibilidades también para decidir el orden de evaluación de cada subsistema; pueden evaluarse de modo simultáneo (*esquema de Jacobi*) o secuencial (*esquema de Gauss-Seidel*). Es posible también utilizar técnicas de interpolación y extrapolación para obtener los valores de las variables de entrada en instantes de tiempo en los que no están disponibles por la naturaleza del esquema de comunicación elegido. Estas opciones pueden combinarse para dar lugar a una gran variedad de *configuraciones de co-simulación*, lo que aumenta considerablemente el estudio de todas las combinaciones

posibles entre los métodos aplicables. Esta gran variedad de métodos pone a disposición del ingeniero una amplia gama de opciones para abordar un problema determinado, lo que representa, en principio, una ventaja. Por otra parte, sin embargo, decidir a priori qué combinación de métodos utilizar con un problema concreto no es una tarea sencilla.

Para llevar a cabo este trabajo se recibió ayuda del Laboratorio de Ingeniería Mecánica (LIM) de la Universidade da Coruña, en el cual se ha abordado desde tiempo atrás el empleo de métodos de co-simulación en el estudio de sistemas mecánicos y mecatrónicos. Actualmente en dicho laboratorio se continúa trabajando en varios proyectos que están relacionados con esta temática.

Este trabajo se centra en realizar comparaciones entre diversos métodos de co-simulación para estudiar el efecto de estos en la precisión y estabilidad de la simulación del sistema. Esta comparativa dará pautas para elegir el método más adecuado en función de la naturaleza de los diversos sistemas a co-simular, algo que es realmente complejo debido a la gran diversidad de técnicas que es posible aplicar, tal y como se mencionó anteriormente.

1.2 Antecedentes

Con los avances en tecnología también han avanzado las expectativas con respecto a la co-simulación. Los primeros trabajos sobre acoplamiento de solvers en el ámbito de la simulación de sistemas mecánicos tuvieron lugar a finales del s. XX, p. ej. [5], [6]. Desde entonces, la comunidad investigadora se ha esforzado por establecer una terminología clara para referirse a los distintos métodos y técnicas de co-simulación [7] y por determinar sus propiedades en lo que se refiere a estabilidad y precisión [1]. El acoplamiento de solvers no es un área temática exclusiva de la ingeniería mecánica, y comparte contenidos con otras especialidades como las ingenierías: electrónica, de comunicaciones e informática, aunque con diferencias respecto al enfoque con el que se abordan los problemas. En la actualidad las principales líneas de trabajo que están abiertas en el campo de la co-simulación se centran en garantizar que la integración de los sistemas acoplados resulta estable y precisa, predecir el comportamiento de la integración numérica de forma fiable, y dotar a la co-simulación de la flexibilidad y eficiencia necesarias para simular sistemas de ingeniería complejos en tiempo real, muchas veces incluyendo componentes físicos como subsistemas.

Uno de los problemas que se intentan resolver en la actualidad en el ámbito de la co-simulación es la pérdida o ganancia de energía a medida que avanzan los cálculos en el tiempo. Una de las consecuencias de acoplar varios subsistemas a través de una interfaz de tiempo discreto es la aparición de inconsistencias de energía, incluso cuando ambos subsistemas se integran con el mismo paso de tiempo. En [8] se muestran distintos métodos basados en el concepto de pasividad, para observar y controlar este aspecto. Allí se utiliza como ejemplo un sistema muy utilizado en la literatura de la co-simulación: el oscilador lineal de dos grados de libertad. Una tarea relacionada es la detección de cambios artificiales en la energía del sistema debidos a inconsistencias en la interfaz, que se ha abordado en trabajos como los mostrados en [9] y [10].

Determinar a priori, es decir, antes de llevar a cabo la integración numérica, de los parámetros más adecuados para ejecutar una co-simulación es otra tarea que está recibiendo atención en la comunidad investigadora. Para obtener este objetivo es necesario estudiar la respuesta del sistema co-simulado y compararla, si es posible, con la integración monolítica del movimiento. Puede encontrarse un cierto número de publicaciones que realizan un estudio teórico de la estabilidad y convergencia de los métodos de co-simulación, pero sus conclusiones se limitan normalmente a sistemas mecánicos cuyas ecuaciones son lineales, lo que representa un subconjunto muy pequeño de los sistemas mecánicos reales. El estudio del efecto de la configuración de co-simulación en sistemas mecánicos no lineales es mucho más complejo y frecuentemente requiere el uso de métodos no analíticos. Esta tarea se ha abordado en publicaciones como [4] y [11].

1.3 Objetivo

Este trabajo de fin de grado representa una nueva contribución en las líneas mencionadas en la Sección 1.2. Su principal objetivo es estudiar la precisión y la estabilidad que ofrecen los distintos métodos de co-simulación cuando se aplican al estudio de sistemas con componentes mecánicos. Dada la imposibilidad práctica de obtener un método de co-simulación óptimo que pueda aplicarse de modo general a cualquier sistema mecánico, se ha optado por establecer como objetivo del trabajo la determinación de principios generales que puedan emplearse para configurar adecuadamente los parámetros de la co-simulación en casos prácticos.

Los objetivos parciales del trabajo se resumen a continuación:

- Seleccionar ejemplos representativos que puedan proporcionar información relevante sobre el comportamiento de las técnicas de co-simulación cuando se aplican al estudio de sistemas mecánicos.
- Implementar un código de simulación genérico para ejecutar la simulación numérica de los ejemplos seleccionados usando técnicas de acoplamiento de solvers.
- Comparar los resultados obtenidos con la experiencia previa investigadora reportada en la literatura.
- Extraer, si es posible, conclusiones generales sobre el efecto de variar la configuración de co-simulación en la precisión y estabilidad de los resultados obtenidos.

Se han empleado como problemas de test dos ejemplos muy utilizados en la literatura de co-simulación de sistemas mecánicos: el oscilador lineal de dos grados de libertad y un manipulador de dos grados de libertad controlado con actuadores hidráulicos. Se ha implementado el código necesario para resolver estos ejemplos a través de técnicas de co-simulación y se ha comparado con resultados previamente existentes para validarlo.

En una segunda fase de la investigación, se ha realizado una comparativa de los resultados proporcionados por distintos métodos de co-simulación, atendiendo a su capacidad para mantener la simulación lo más precisa posible.

Las conclusiones del trabajo muestran que los objetivos trazados fueron logrados con éxito luego de realizar la programación de las distintas simulaciones en MATLAB y con ellas hacer todas las comparativas necesarias.

2 CONFIGURACIÓN DE LA CO-SIMULACIÓN

Existen diversas técnicas para realizar la co-simulación de sistemas que se pueden considerar “clásicas”. A continuación se explican con detenimiento las técnicas que se han empleado para llevar a cabo este trabajo. Se detallan el esquema de co-simulación utilizado, la selección de intervalos de comunicación multi-rate y single-rate, y diversos métodos de extrapolación para evaluar los inputs entre instantes de comunicación.

2.1 Esquemas no iterativos de co-simulación

De modo general, en co-simulación pueden usarse dos tipos de esquemas: los iterativos y los no iterativos. La existencia de estos dos grupos de esquemas viene motivada por el hecho de que cada subsistema en un entorno de co-simulación no dispone de información sobre la evolución del resto entre puntos de comunicación.

Supongamos que existe un punto de comunicación en $t = t_0$. En este instante, los distintos subsistemas reciben información sobre el estado del resto del sistema y envían la suya propia. A continuación, cada uno de ellos integra sus ecuaciones dinámicas hasta el siguiente punto de comunicación, $t = t_1 = t_0 + H$, donde H es el intervalo entre puntos de comunicación. Esta integración se lleva a cabo sin conocimiento de cómo han evolucionado el resto de subsistemas entretanto. Al alcanzar el punto de comunicación t_1 , los subsistemas vuelven a intercambiar información. En principio, al estar disponible ahora nueva información sobre el estado de los subsistemas en t_1 , sería posible repetir la integración de las ecuaciones dinámicas entre t_0 y t_1 para obtener así una simulación más precisa. Esto implica revertir el estado de los subsistemas al que tenían en t_0 y repetir los cálculos de integración entre t_0 y t_1 .

Un esquema en el que se permite la repetición del paso de tiempo tal y como se ha descrito es un *esquema iterativo*. En un *esquema no iterativo*, cada subsistema realiza la integración de sus ecuaciones dinámicas una sola vez entre puntos de comunicación, sin producirse una reevaluación de sus resultados cuando existe nueva información sobre el resto del sistema.

Se sabe que los esquemas iterativos son más estables en general que los no iterativos [5]. Por otra parte, los esquemas iterativos presentan ciertas desventajas si son comparados con los no iterativos: son más lentos debido a que se realiza un mayor número de iteraciones en un mismo intervalo de tiempo. Además, en algunas aplicaciones no es posible repetir la integración del sistema tal y como requieren los esquemas iterativos. Este es a menudo el caso de sistemas que requieren simulación en tiempo real, como puede ser el estudio de un dispositivo en un banco de ensayos o los conocidos dispositivos hápticos.

El ámbito de este trabajo está limitado a la co-simulación con esquemas no iterativos, de interés en aplicaciones de tiempo real y más exigentes que los iterativos en lo que se refiere a estabilidad y precisión.

Los esquemas no iterativos realizan los cálculos de los subsistemas una sola vez por cada intervalo de tiempo, lo que les permite realizar la simulación en un tiempo reducido. Su mayor desventaja es que permiten la entrada de errores en el sistema durante el intercambio de información con la interfaz discreta. Estos errores no son corregidos cuando se completa el paso de tiempo de comunicación, a menos que se empleen algoritmos especialmente concebidos para ello [8], [9].

Un *esquema de co-simulación* es una secuencia de instrucciones que definen el cómo y el cuándo se envían las variables de unos subsistemas a otros. También dictan el orden en

que se realizan los cálculos o integraciones dentro de cada intervalo de tiempo. La selección de un esquema de co-simulación influye de manera definitiva sobre la respuesta que se obtendrá de la co-simulación realizada. Existen dos tipos de esquemas no iterativos fundamentales: los de Jacobi y Gauss-Seidel.

2.1.1 Esquema de co-simulación de Jacobi

En el esquema de Jacobi los subsistemas envían los outputs y reciben los inputs al mismo tiempo en cada punto de comunicación y, a continuación, la integración de cada uno de ellos se realiza simultánea e independientemente. Al realizar los cálculos paralelamente, este esquema puede usarse para aprovechar al máximo los recursos de cálculo de un ordenador con varios núcleos o de una red de ordenadores. Se puede usar un núcleo distinto para cada subsistema y realizar las integraciones por separado (paralelización), permitiendo así un menor tiempo de cálculo total.

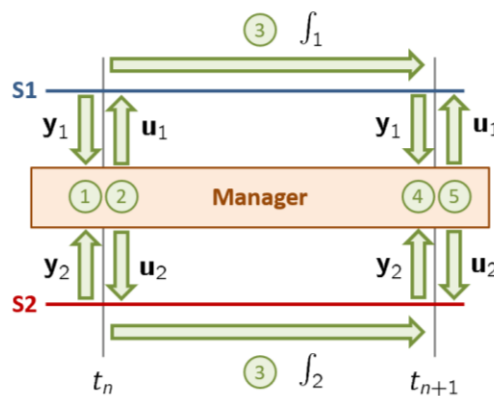


Figura 3. Esquema de co-simulación de Jacobi.

En la Figura 3 se ven representados dos subsistemas llamados S1 y S2, cada uno envía a la interfaz discreta llamada manager una variable y y la cual es el output de cada subsistema (paso 1). El manager recibe la información y entonces traduce la misma en las variables u que envía como input al subsistema correspondiente (paso 2). Una vez que S1 y S2 tienen la información necesaria, cada uno realiza la integración y así avanzan un instante en el tiempo (paso 3). En el siguiente instante de comunicación se repite el intercambio de información descrito (pasos 4 y 5). Este proceso se repite hasta el final de la co-simulación.

2.1.2 Esquema de co-simulación de Gauss-Seidel

A diferencia del método de Jacobi, en este esquema no se intercambian las variables de cada subsistema en el mismo instante de tiempo. Si se tienen dos subsistemas S1 y S2, uno de ellos enviará primero al manager su output para que este envíe al otro subsistema un input (paso 1). El subsistema que recibe el input realiza su integración avanzando el tiempo correspondiente (paso 2), y al finalizar envía el output a la interfaz discreta al instante de tiempo anterior (paso 3). El manager traduce la información recibida en el input del subsistema que lo necesita para realizar la respectiva integración (paso 4) y enviar sus outputs al otro subsistema en el siguiente punto de comunicación (paso 5). Así finaliza el proceso que se repetirá para todos los instantes de tiempo requeridos. Todo lo explicado anteriormente se puede ver reflejado gráficamente en la Figura 4.

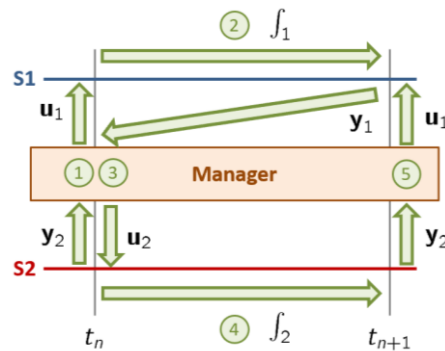


Figura 4. Esquema Gauss-Seidel.

Se puede observar que uno de los subsistemas realiza la integración y luego la información se envía al paso anterior de tiempo para que el otro subsistema, que todavía no había avanzado hasta el siguiente punto de comunicación, pueda integrar sus ecuaciones. Como se puede intuir, una primera cuestión que se puede plantear es si afecta a la co-simulación quién avanza primero. Por otro lado, este esquema puede plantear dificultades en sistemas que requieren de una simulación en tiempo real. Esto es debido a que el tiempo requerido para completar la integración de los subsistemas tiene que ser menor que el paso de tiempo global de comunicación existente entre ellos. Por ejemplo, si se tiene un paso de tiempo de comunicación $H = 10$ ms, todo el proceso de cálculo de este esquema para un paso de tiempo debe durar menos de 10 ms, de no ser así sería imposible realizar una simulación en tiempo real.

2.2 Malla de intervalos de tiempo

Para realizar la co-simulación es necesario el intercambio de información entre subsistemas mediante una interfaz discreta para poder realizar sus respectivos cálculos. En el punto anterior se explicó que hay esquemas que guían los pasos para ejecutar el proceso de intercambio de variables y de integración. Un parámetro también importante en la co-simulación es el tamaño del intervalo de tiempo que existirá entre cada comunicación de los subsistemas, así como el número de pasos de integración que realiza cada subsistema entre puntos de comunicación.

Los sistemas simulados son producto de la unión de dos subsistemas que en la mayoría de los casos son componentes de distinta naturaleza (por ejemplo, la conexión entre un subsistema mecánico con uno eléctrico). La naturaleza de cada componente define el comportamiento dinámico del mismo, lo que permite conocer la velocidad con la que los parámetros que definen su comportamiento cambian. El comportamiento dinámico de cada componente es importante para la co-simulación, porque determina el tamaño del paso de tiempo necesario para integrar sus ecuaciones dinámicas de forma precisa y estable.

En general, un componente mecánico tiene normalmente un comportamiento dinámico "lento" en comparación con otros elementos presentes con frecuencia en aplicaciones industriales, como es el caso de sistemas electrónicos o hidráulicos. Por ejemplo, la dinámica de la suspensión de un vehículo puede capturarse con precisión con pasos de integración del orden de milisegundos. La dinámica "rápida" de los componentes hidráulicos o electrónicos del mismo sistema requiere habitualmente pasos mucho más pequeños, del orden del microsegundo en algunos casos.

Cuando se acoplan dos subsistemas de distinta naturaleza y diferentes escalas de tiempo en un entorno de co-simulación, aparece el problema de determinar el intervalo de tiempo con el que los mismos intercambiarán información. En general, puede usarse el mismo intervalo para todos los subsistemas (co-simulación single-rate) o adaptar el intervalo de comunicación a las necesidades de cada subsistema (co-simulación multi-rate).

2.2.1 Co-simulación single-rate

En un esquema de co-simulación single-rate el intervalo de tiempo global de comunicación es el mismo para todos los subsistemas; cada subsistema, además, lleva a cabo la integración de sus ecuaciones dinámicas usando este paso de tiempo también, como se muestra en la Figura 5. En otras palabras, se obliga a que ambos componentes tengan el mismo paso de tiempo para sus respectivas integraciones. Si se tiene un acoplamiento de componentes de distinta naturaleza, para capturar el comportamiento dinámico de ambos subsistemas, se utiliza el intervalo de tiempo del sistema “rápido”. Un beneficio que posee este método es que al hacer uso de un paso de tiempo reducido se asegura, en la mayoría de los casos, una mejor obtención de la respuesta dinámica de todos los subsistemas.

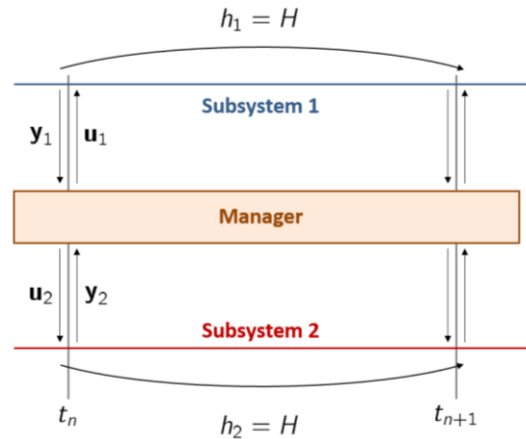


Figura 5. Esquema de co-simulación single-rate.

La desventaja más clara de este método es que hace uso de recursos de cálculo innecesariamente al obligar a un sistema “lento” a que realice sus integraciones con un paso de tiempo más pequeño del que necesitaría por su dinámica. Otro inconveniente, en algunos subsistemas en particular, el uso de un paso de tiempo muy pequeño puede introducir errores numéricos. Este es el caso de sistemas mecánicos integrados con algunas formulaciones dinámicas de index-3 [12].

2.2.2 Co-simulación multi-rate

En un esquema de co-simulación multi-rate, cada subsistema integra su dinámica con un intervalo de tiempo propio y se define un paso de tiempo global en el cual se comunican con la interfaz discreta para intercambiar información. Usualmente este paso de tiempo global es igual al intervalo de tiempo del subsistema “lento”. Con este método se busca aprovechar al máximo los recursos de cálculo y así disminuir el tiempo con el que se realiza la co-simulación.

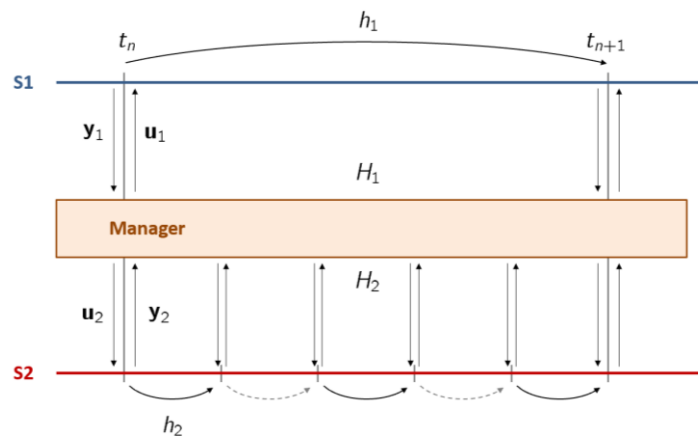


Figura 6. Esquema de co-simulación multi-rate.

En la Figura 6 se muestra un esquema de co-simulación de tipo Jacobi multi-rate. El S1 es un subsistema que tiene un comportamiento dinámico “lento” mientras que el S2 posee un comportamiento dinámico “rápido”. Por tanto, el paso de tiempo de integración h_2 (correspondiente al S2) será reducido para hallar con precisión la respuesta dinámica del subsistema. En este caso, la comunicación entre el manager y el S2 se produce para cada paso de integración del subsistema. Sería posible, no obstante, limitar la comunicación entre el manager y el S2 a los puntos de comunicación definidos con el paso de comunicación H_1 .

Una desventaja de este método es que el subsistema “rápido” en cada paso global de tiempo realiza una cantidad de integraciones en donde no recibe información actualizada del otro subsistema lo que da lugar a imprecisiones y errores en los cálculos. En este caso suele ser necesario utilizar técnicas de extrapolación para predecir la evolución de los inputs entre puntos de comunicación.

2.3 Selección de las variables de acoplamiento

Como se ha mencionado, en los algoritmos de co-simulación los subsistemas intercambian entre sí la información necesaria para permitir la ejecución de los cálculos de cada uno de ellos. Esta información está compuesta por las variables que un subsistema envía como output y otro subsistema recibe como input y que se conocen en general como variables de acoplamiento.

Con frecuencia, al dividir un sistema físico en subsistemas existen distintas maneras de representar la conexión entre éstos. Aunque en realidad, en la mayor parte de los casos, la interacción entre subsistemas se realiza a través de fuerzas, en ocasiones es conveniente asumir que el flujo de información entre subsistemas en la interfaz de co-simulación tiene lugar a través de unas variables de acoplamiento de otra naturaleza.

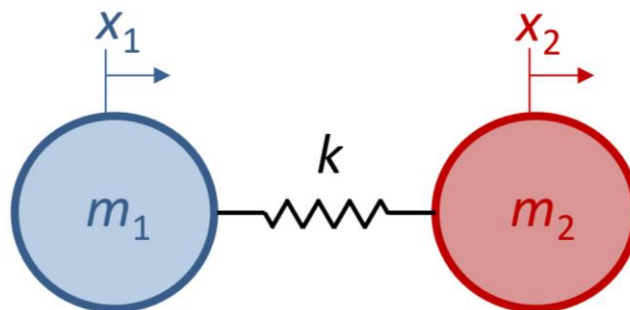


Figura 7. Sistema de dos masas puntuales unidas por un muelle.

Tomando como referencia la Figura 7, se tiene un sistema mecánico compuesto por dos masas puntuales, m_1 y m_2 , conectadas por un muelle de rigidez k . Es posible considerar cada masa por separado un subsistema y estudiar el movimiento del conjunto utilizando un esquema de co-simulación. La definición de inputs y outputs en la interfaz puede hacerse de distintas maneras.

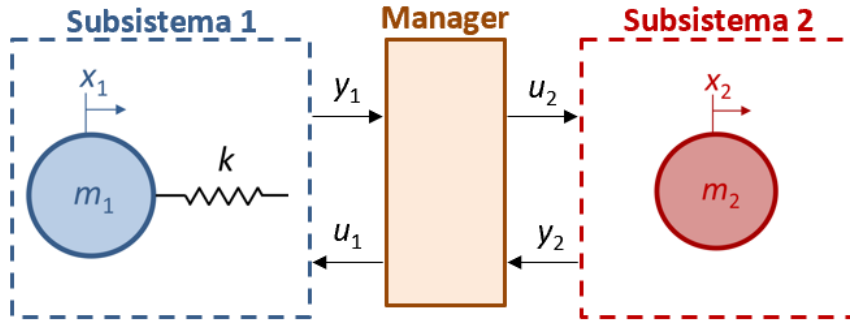


Figura 8. Acoplamiento Fuerza-Desplazamiento.

En la Figura 8 se ha separado el sistema de tal manera que el subsistema 1 cuenta con la información correspondiente al muelle además de la posición de la masa m_1 , mientras que el subsistema 2 solo cuenta con la posición de la masa m_2 . Para cada subsistema se quiere hallar la aceleración para llevar a cabo posteriormente la integración de su movimiento. Resolviendo la ecuación de movimiento del sistema se puede obtener la aceleración de cada masa. Para la masa m_1 :

$$\ddot{x}_1 = \frac{k(x_2 - x_1)}{m_1} \quad (1)$$

Y para la m_2 :

$$\ddot{x}_2 = \frac{f_c}{m_2} = \frac{k(x_1 - x_2)}{m_2} \quad (2)$$

donde f_c es la fuerza de acoplamiento transmitida en la interfaz. En cada ecuación está indicado en rojo lo que cada uno de los subsistemas necesita como información de entrada para poder obtener su aceleración. El subsistema 1 enviará como output la fuerza ejercida por el muelle, f_c , mientras que el subsistema 2 enviará la posición de la masa 2, de ahí que este acoplamiento se llame fuerza-desplazamiento.

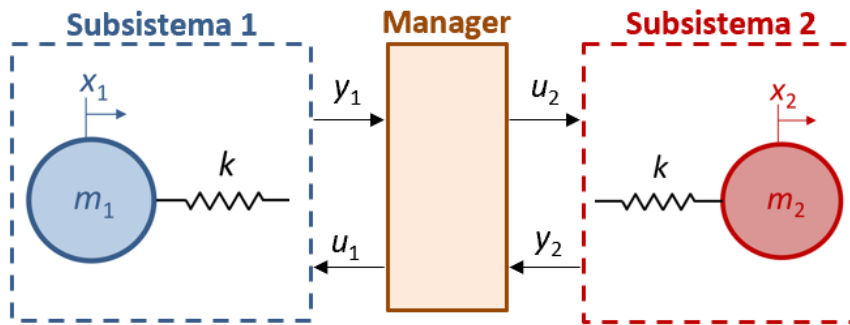


Figura 9. Acoplamiento Desplazamiento-Desplazamiento.

En la Figura 9 se muestra un acoplamiento distinto donde se puede observar que ambos subsistemas poseen la información relativa a la rigidez del muelle. Observando nuevamente las ecuaciones donde se obtienen las aceleraciones de m_1

$$\ddot{x}_1 = \frac{k(x_2 - x_1)}{m_1} \quad (3)$$

y m_2

$$\ddot{x}_2 = \frac{k(x_1 - x_2)}{m_2} \quad (4)$$

Nuevamente indicada en rojo está la información que cada subsistema no posee para calcular su aceleración. Por tanto, se puede ver que en este acoplamiento el subsistema 1 enviará su posición al igual que el subsistema 2. Además de estos acoplamientos mencionados se podría realizar el acoplamiento Fuerza-Fuerza de similar manera a los anteriores.

Para cada sistema existirán distintos acoplamientos dependiendo de los componentes que interactúen en el mismo. La elección del acoplamiento a utilizar es importante debido a que influirá en la precisión y estabilidad de la respuesta que se obtenga del sistema. No obstante, en algunas ocasiones, al no poseer información suficiente sobre los componentes utilizados, ciertos acoplamientos no pueden ser aplicados, aunque sean estos con los que se obtendría una respuesta más precisa del sistema. Saber cuáles son los mejores acoplamientos para el sistema que se quiere co-simular es importante. Para averiguar cuál es el mejor acoplamiento para utilizar es común observar la ecuación de movimiento del sistema expresada en forma de espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} \quad (5)$$

Como se puede observar dicha ecuación de espacio de estados cuenta con distintas variables:

- **z**: estado
- **y**: output
- **u**: input
- **ẋ**: derivada del estado
- **A**: matriz de estados
- **B**: matriz de input (entrada)
- **C**: matriz de output (salida)
- **D**: matriz de feedthrough (transmisión directa)

Esta ecuación se resuelve en cada uno de los pasos de tiempo para obtener resultados y además enviar los outputs correspondientes a cada subsistema.

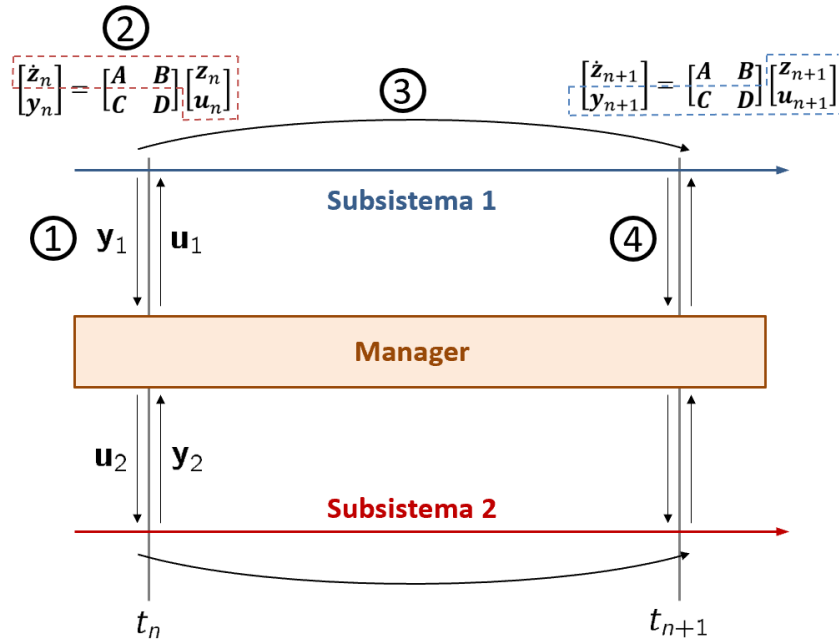


Figura 10. Evaluación de la ecuación de espacio de estados en un paso de tiempo en un esquema de co-simulación Jacobi single-rate.

En la Figura 10 se pueden observar dos subsistemas en un entorno de co-simulación. Tomando como referencia el subsistema 1 se explicarán los pasos para realizar los cálculos con los que se obtiene la respuesta del sistema:

1. En este paso se intercambia la información necesaria con el manager para obtener inputs y outputs, cuando $t = t_n$.
2. Se evalúa el vector de derivadas del estado $\dot{\mathbf{z}}_n = \mathbf{A} \mathbf{z}_n + \mathbf{B} \mathbf{u}_n$.
3. Se integra el subsistema y se avanza al siguiente paso de tiempo, $t = t_{n+1}$.
4. Se hacen los respectivos cálculos del output en $t = t_{n+1}$: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{C} \mathbf{z}_{n+1} + \mathbf{D} \mathbf{u}_{n+1}$.

Cada uno de estos pasos tiene un efecto sobre la respuesta final que se hallará del sistema. Si se observa con detenimiento el paso 4, puede resaltarse que para el cálculo del output \mathbf{y}_{n+1} existen datos que no se poseen en dicho paso de tiempo: se trata del input \mathbf{u}_{n+1} . Existe más de una posibilidad para solucionar este inconveniente:

Si se tiene que la matriz de feedthrough del sistema es nula, es decir $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, esto significa que el output del subsistema en cuestión no depende del input que debe recibir en ese mismo instante de comunicación; por ejemplo, esto sucede en el acoplamiento Desplazamiento-Desplazamiento del sistema de dos masas puntuales unidas por un muelle. En este caso, el cálculo del output para el paso 4 se limita a evaluar $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{C} \mathbf{z}_{n+1}$. Por otro lado, si $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ es debido a que el output sí depende del input que debe recibir en ese mismo instante de comunicación (por ejemplo, en el acoplamiento Fuerza-Desplazamiento del sistema de dos masas puntuales unidas por un muelle). Para este último caso se debe utilizar un método de extrapolación, con el que básicamente se buscará aproximar el valor del input para el instante de tiempo actual, \mathbf{u}_{n+1} , usando la información disponible a partir de pasos previamente efectuados.

Con lo anteriormente explicado se puede concluir que es de esperar que acoplamientos donde $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ sean mas estables y precisos debido a que la extrapolación que se debe aplicar cuando $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ introduce errores en la integración del sistema.

2.4 Extrapolación e interpolación

Tal y como se muestra en el apartado anterior, en ocasiones los subsistemas de un entorno de co-simulación requieren para completar sus cálculos valores de sus inputs \mathbf{u} que no están disponibles en un determinado momento. En estos casos es necesario recurrir a la extrapolación o interpolación de estos valores a partir de la historia de inputs disponible hasta entonces. Es decir, se hace uso de la información de pasos de tiempo anteriores para estimar el valor que se espera obtener como input y así poder hacer el cálculo de la variable que se quiere entregar como output, o de las derivadas de los estados.

Incluso si se usan esquemas single-rate, la extrapolación es siempre necesaria cuando en algún subsistema la matriz de feedthrough no es nula ($\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$). Además del caso mencionado, también hay que recurrir a la extrapolación cuando se utilizan esquemas multi-rate. Con el uso de la extrapolación se quiere predecir para el subsistema de paso de tiempo menor el comportamiento que tiene el otro subsistema, más lento, entre dos puntos de intercambio de información.

Otro escenario que requiere el uso de técnicas de extrapolación o interpolación es la co-simulación con mallas temporales no alineadas, es decir, cuando los puntos de comunicación de los distintos subsistemas no coinciden en el tiempo [4]. Sabiendo el tiempo de desfase que existe, la extrapolación se utiliza para calcular los inputs que tendrían cada uno de los subsistemas en los instantes de comunicación correspondientes. El estudio de la co-simulación con mallas temporales no alineadas es un tema relativamente complejo que no se aborda en este trabajo.

Habiendo mencionado algunas de las aplicaciones de interés que tiene la extrapolación es importante mencionar que en algunos casos en vez de extrapolar se interpola. Por ejemplo,

aplicando un esquema multi-rate de Gauss-Seidel se presenta la posibilidad de que exista interpolación. Para un subsistema que avanza en segundo lugar en un método Gauss-Seidel, la información con la que cuenta no es sólo de pasos de tiempo anteriores porque su último input es realmente el output del otro subsistema en un paso de tiempo posterior. Por tanto, si se tiene que el subsistema que avanza en segundo lugar es el que posee un paso de tiempo menor se realizaría una interpolación debido a que éste posee la información del instante de tiempo anterior y también la del instante de tiempo posterior gracias al uso del método Gauss-Seidel (Figura 4).

Dependiendo de qué elemento del entorno de co-simulación es responsable de ejecutarla, la extrapolación puede ser interna o externa. Se dice que es interna cuando es llevada a cabo por los subsistemas y que es externa cuando es el manager el que se encarga de realizarla. Cada uno de estos tipos de extrapolación se aplica para distintos casos, por ejemplo, en ocasiones no se tiene acceso a la programación de los subsistemas y es obligatorio hacer uso de una extrapolación externa mediante la programación del manager. Lo ideal en la co-simulación es aplicar la extrapolación interna siempre que esto sea posible.

El modo más frecuente de realizar la extrapolación o interpolación es utilizando polinomios. Dependiendo del orden del polinomio hablaremos de extrapolación de orden cero (ZOH, *zero order hold*), de primer orden (FOH, *first order hold*) o de otras de mayor orden como la SOH (*second order hold*) o la TOH (*third order hold*). Estos tipos de extrapolación influyen notablemente sobre los resultados que se obtienen en la co-simulación. En este trabajo se utilizaron extrapolaciones ZOH y FOH; dependiendo del sistema en que sean utilizados cada uno de los tipos de extrapolación tiene sus beneficios e inconvenientes. Por tanto, no es posible decir que algún tipo de extrapolación será siempre mejor que otro porque el comportamiento dependerá del sistema a simular.

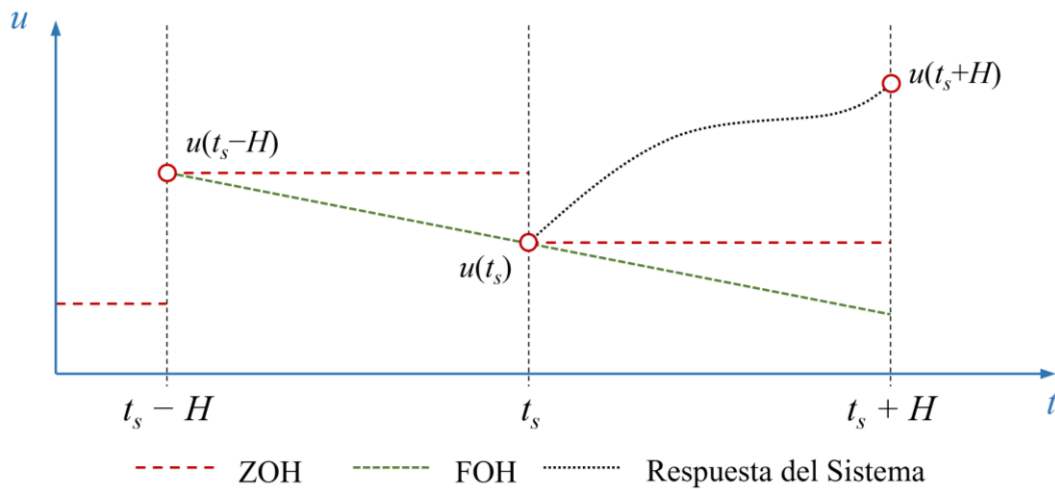


Figura 11. Efecto del orden de extrapolación en el cálculo de los inputs.

En la Figura 11 se muestra una comparación cualitativa entre los tipos de extrapolación ZOH y FOH. Se puede observar que el ZOH se basa en decir que el valor del input en el instante anterior y el valor de éste en el instante actual es el mismo, por eso se llama de orden 0. Por otro lado, el FOH utiliza la información de los inputs de dos instantes de tiempo anteriores para hacer una proyección lineal y así intentar predecir lo que se espera como valor. Como muestra la Figura 11, las ecuaciones que se tienen para poder aplicar cada uno de los tipos de extrapolación son las siguientes:

Para un ZOH:

$$\mathbf{u}(t_s) = \mathbf{u}(t_s - H) \quad (6)$$

En el caso de usar FOH:

$$\mathbf{u}(t_s) = \mathbf{u}(t_s - H) + (\mathbf{u}(t_s - H) - \mathbf{u}(t_s - 2H)) \quad (7)$$

En este trabajo se estudió el efecto que tienen ambos tipos de extrapolación en la co-simulación. Se comprobó que dependerá de distintos factores que el uso de la extrapolación beneficie o al contrario perjudique la respuesta obtenida en una simulación. Es un aspecto importante y determinante sobre la co-simulación por lo que se debe estudiar con precisión el comportamiento del sistema a simular y así decidir qué tipo de extrapolación es la que se debe aplicar.

3 SISTEMAS ESTUDIADOS

En este trabajo se evaluaron distintas técnicas de co-simulación aplicadas en sistemas con componentes mecánicos. Los sistemas estudiados fueron elegidos por poseer alguna particularidad que los hace interesantes para la investigación realizada (poseer una solución analítica conocida para poder comparar los resultados, haber sido tratados con anterioridad en la literatura, etc.). Además, se eligieron sistemas que tuviesen un comportamiento distinto entre sí, para así lograr hacer un estudio más amplio. Los sistemas estudiados han sido un oscilador lineal de dos grados de libertad y un manipulador de dos grados de libertad controlado con actuadores hidráulicos.

3.1 Oscilador lineal de dos grados de libertad (OLDGDL)

El primer sistema elegido para realizar el estudio es el oscilador lineal de dos grados de libertad. Se escogió debido a su simpleza y a la sencillez con la que se obtiene la solución numérica (monolítica) y la solución analítica del mismo. Dicha solución analítica permite realizar comparaciones entre ella y las aplicaciones de las distintas técnicas de simulación, para así saber la precisión y estabilidad que tienen frente a la respuesta real del sistema. Este sistema se ha usado con frecuencia en la literatura de co-simulación de sistemas mecánicos [2], [4].

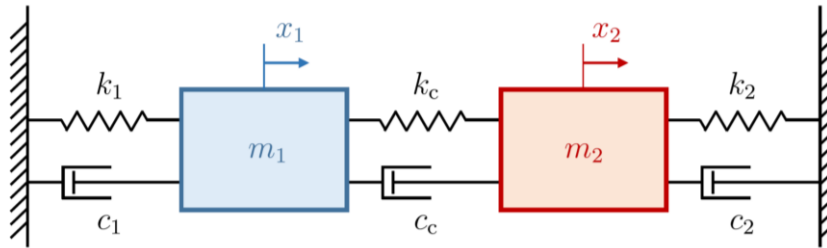


Figura 12. Modelo del oscilador lineal de dos grados de libertad.

La Figura 12 muestra el modelo de oscilador lineal usado en este trabajo. En dicha figura se representan distintas variables: k representa los coeficientes de rigidez de los muelles, c se utiliza para identificar a los coeficientes de amortiguamiento, las masas son definidas con la letra m y las coordenadas están identificadas con la letra x .

Para el estudio del sistema se imponen las siguientes condiciones iniciales: $m_1 = m_2 = 1$ kg, $k_1 = 10$ N/m, $k_2 = 1000$ N/m, $k_c = 100$ N/m, y $c_1 = c_2 = c_c = 0$ Ns/m, $\dot{x}_{1,0} = 100$ m/s, $\dot{x}_{2,0} = -100$ m/s y se toman además los desplazamientos iniciales como nulos, es decir, el sistema parte del reposo. Con el conocimiento de dichas condiciones se procede a obtener las ecuaciones de movimiento para la solución monolítica:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + c_c & -c_c \\ -c_c & c_c + c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_c + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

o, de forma más compacta,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{f} \quad (9)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masas, $\dot{\mathbf{X}}$ es el vector de velocidades, \mathbf{X} el vector de posiciones, \mathbf{f} es el vector de fuerzas generalizadas, \mathbf{C} es la matriz de amortiguamiento y por último \mathbf{K} es la matriz de rigidez.

En la ecuación (8) aparecen las fuerzas f_1 y f_2 que representan las fuerzas aplicadas para cada una de las masas correspondientemente, aunque para este estudio dichas fuerzas tendrán un valor nulo.

A partir de estas ecuaciones se obtiene la solución analítica. Sabiendo que se tiene una ecuación diferencial de segundo orden, se busca transformar la misma en una ecuación de primer orden. Se proponen los siguientes vectores:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}; \quad \dot{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Se obtiene entonces una ecuación diferencial de primer orden:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} \quad (11)$$

donde la expresión de la matriz \mathbf{A} puede obtenerse a partir de la ecuación (8):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-(k_1 + k_c)}{m_1} & \frac{k_c}{m_1} & \frac{-(c_1 + c_c)}{m_1} & \frac{c_c}{m_1} \\ \frac{k_c}{m_2} & \frac{-(k_2 + k_c)}{m_2} & \frac{c_c}{m_2} & \frac{-(c_2 + c_c)}{m_2} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Sabiendo que el sistema posee un comportamiento de tipo armónico se propone una solución de esta naturaleza para la ecuación (11). Con la siguiente ecuación se obtendría la solución analítica del OLDGDL:

$$\mathbf{Z}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{Z}_0 \quad (13)$$

donde \mathbf{Z}_0 es el vector que contiene las posiciones y velocidades iniciales de los subsistemas.

Uno de los parámetros usados para comprobar la bondad de los distintos métodos aplicados a este sistema es la energía mecánica. Gracias a la misma se observa claramente la acumulación de errores que existe con la aplicación de los distintos métodos de co-simulación. Por tanto, además de las ecuaciones que se han hallado anteriormente, se obtiene la ecuación (14) correspondiente a la energía mecánica del sistema

$$E_m = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{X} \quad (14)$$

Ambas soluciones mencionadas se programaron y sirvieron como referencia para una evaluación más completa de la aplicación de los distintos métodos de simulación. Para aplicar dichos métodos se separó el sistema en dos, teniendo cada masa como un subsistema. En este trabajo se estudiaron dos selecciones posibles de variables de acoplamiento para el OLDGDL: fuerza-desplazamiento y desplazamiento-desplazamiento.

3.1.1 Acoplamiento Fuerza-Desplazamiento (f-d)

La elección de variables de acoplamiento en un entorno de co-simulación determina implícitamente la división del sistema global en subsistemas. En este caso, para realizar un acoplamiento fuerza-desplazamiento se ha decidido que el subsistema 1 sea el responsable de proporcionar la fuerza de acoplamiento al subsistema 2, y que éste a su vez devuelva su posición y velocidad al subsistema 1. Con esta selección de variables, la evaluación de las fuerzas de acoplamiento queda englobada dentro del subsistema 1.

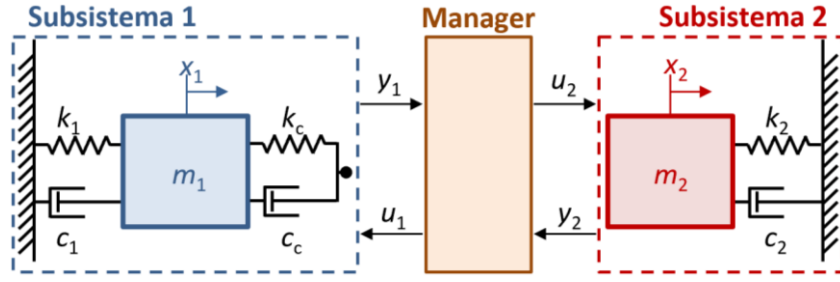


Figura 13. Oscilador lineal co-simulado con un acoplamiento fuerza-desplazamiento.

Como se observa en la Figura 13, al dividir el OLDGDL siguiendo el acoplamiento descrito se obtiene dos subsistemas bien diferenciados. Cada subsistema posee distinta información dependiendo de los elementos que se encuentren dentro del mismo. Por tanto, el subsistema 1 al contrario del subsistema 2 cuenta con el valor de las variables k_c y c_c . La información que necesita cada subsistema para realizar sus cálculos se determinará a partir de las ecuaciones que describen el movimiento de cada una de las masas. Para la m_1 se tiene la siguiente ecuación:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_c) \dot{x}_1 - c_c \dot{x}_2 + (k_1 + k_c) x_1 - k_c x_2 = f_1 \quad (15)$$

Mientras que para m_2 se tiene lo siguiente:

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_c \dot{x}_1 + (c_c + c_2) \dot{x}_2 - k_c x_1 + (k_c + k_2) x_2 = f_2 \quad (16)$$

Para hallar la respuesta dinámica de un sistema lo principal es hallar su aceleración e integrar la misma, haciendo posible conocer tanto la velocidad del sistema como la posición para cada instante. Por tanto, se procede a obtener la aceleración de cada uno de los subsistemas desde la ecuación de movimiento respectiva. Para el subsistema 1:

$$\ddot{x}_1 = \frac{c_c [\dot{x}_2] + k_c [x_2] - (c_1 + c_c) \dot{x}_1 - (k_1 + k_c) x_1 + f_1}{m_1} \quad (17)$$

Y para el subsistema 2:

$$\ddot{x}_2 = \frac{[c_c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_c (x_1 - x_2)] - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 + f_2}{m_2} \quad (18)$$

Una vez se tienen las ecuaciones se puede definir la información que necesita cada subsistema para poder calcular su aceleración. En las ecuaciones definidas anteriormente se encuentran entre corchetes los parámetros que no posee propiamente cada subsistema. Por tanto, estos parámetros serán la información que intercambien los subsistemas de la siguiente manera:

Como output del subsistema 1 se tendrá la fuerza resultante del muelle y el amortiguador que conectan los dos subsistemas, para que entonces el subsistema 2 la reciba como input y sea capaz de realizar los cálculos que le corresponden:

$$y_1 = c_c (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_c (x_1 - x_2) \quad (19)$$

Y como outputs del subsistema 2 se tendrán la velocidad y la posición (desplazamiento) de la masa 2:

$$y_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

3.1.2 Acoplamiento Desplazamiento-Desplazamiento (d-d)

Otra posibilidad es que cada subsistema envíe al otro su posición y velocidad, para que cada uno de ellos evalúe internamente la fuerza de acoplamiento.

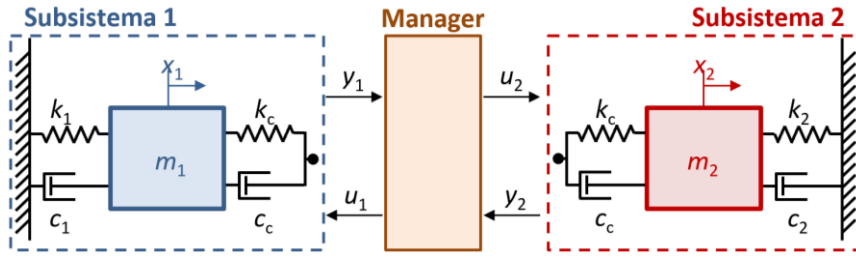


Figura 14. Acoplamiento desplazamiento-desplazamiento en el oscilador lineal.

En la Figura 14 se observa en este acoplamiento. Se observa que, a diferencia de lo que ocurría en el acoplamiento fuerza-desplazamiento, ahora el subsistema 2 necesita conocer el valor de las variables k_c y c_c . Entonces la información que intercambian los subsistemas será distinta a la mostrada en el apartado anterior, hallando qué parámetros son necesarios en cada subsistema para calcular su aceleración. Se procede a obtener la aceleración de cada uno de los subsistemas desde la ecuación de movimiento respectiva. Para el subsistema 1:

$$\ddot{x}_1 = \frac{c_c [\dot{x}_2] + k_c [x_2] - (c_1 + c_c) \dot{x}_1 - (k_1 + k_c) x_1 + f_1}{m_1} \quad (21)$$

Y para el subsistema 2:

$$\ddot{x}_2 = \frac{c_c [\dot{x}_1] + k_c [x_1] - (c_c + c_2) \dot{x}_2 - (k_c + k_2) x_2 + f_2}{m_2} \quad (22)$$

Entre corchetes se encuentra la información que necesita ser intercambiada por ambos subsistemas para llevar a cabo los cálculos. Ambos subsistemas entregarán como output su velocidad y posición (desplazamientos). En el caso del subsistema 1, el output es:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Y para el subsistema 2:

$$\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

3.2 Grúa Hidráulica

Como segundo sistema se utilizó un modelo plano de una grúa que cuenta con un actuador hidráulico. Este sistema se escogió porque posee dos grados de libertad, como se puede observar en la Figura 15, y también porque, a diferencia del anterior, sus ecuaciones dinámicas no son lineales. Gracias a estas características se pueden contrastar resultados con el OLDGL y así comprobar si los distintos métodos de co-simulación evaluados se comportan de la misma manera con sistemas lineales y no lineales. Además, en el Laboratorio de Ingeniería Mecánica se trabajó con un sistema parecido, como se puede ver en [11] y [13], donde se compararon la eficiencia y precisión de las formulaciones monolíticas y las técnicas de acoplamiento de solvers en la simulación de sistemas mecánicos con actuadores hidráulicos.

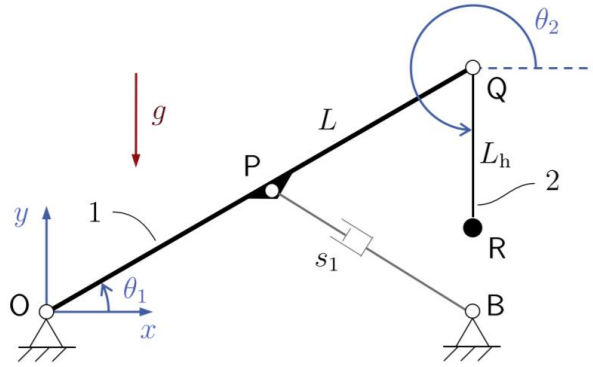


Figura 15. Modelo plano de la grúa hidráulica.

El sólido 1 en la Figura 15 es una varilla de longitud L que tiene una masa distribuida m . El elemento 2 es una varilla de longitud L_h y se considera que posee una masa despreciable. Existen dos masas puntuales m_p y m_h colocadas en los puntos Q y R. El sistema se mueve bajo la acción de la gravedad ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$) y se acciona con un pistón hidráulico que conecta el punto central de la barra 1, P, y un anclaje en tierra, B. Los valores de las propiedades del sistema utilizados en los experimentos numéricos se resumen en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros mecánicos del sistema.

Longitud de la barra 1	L	1.0 m
Longitud de la barra 2	L_h	0.5 m
Masa de la barra 1	m	200 kg
Masa puntual ubicada en Q	m_p	250 kg
Masa puntual ubicada en R	m_h	100 kg
Coordenadas cartesianas del punto B	(x_B, y_B)	$(\sqrt{3}/2, 0) \text{ m}$
Ángulo inicial de la barra 1	$(\theta_1)_0$	$\pi/6 \text{ rad}$
Ángulo inicial de la barra 2	$(\theta_2)_0$	$3\pi/2 \text{ rad}$
Gravedad	g	-9.81 m/s^2

La configuración del sistema puede describirse con dos ángulos θ_1 y θ_2 como coordenadas generalizadas independientes, $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2]^T$. Las ecuaciones dinámicas en coordenadas independientes se pueden escribir como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_h \quad (25)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masas del sistema, \mathbf{c} es el término de Coriolis y efectos centrífugos, \mathbf{f}_h contiene las fuerzas generalizadas ejercidas por el actuador hidráulico sobre el sistema, y por último \mathbf{f} representa otras fuerzas aplicadas sobre el sistema.

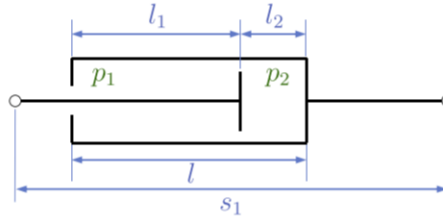


Figura 16. Esquema del actuador hidráulico.

La interfaz mecánica-hidráulica en este sistema puede caracterizarse con la velocidad de alargamiento del actuador, representada como \dot{s}_1 . Esta componente de velocidad está relacionada con las velocidades generalizadas $\dot{\mathbf{q}}$ de la siguiente manera:

$$\dot{s}_1 = \begin{bmatrix} \frac{L(x_B \sin \theta_1 - y_B \cos \theta_1)}{2 s_1} & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \quad (26)$$

La longitud del actuador, s_1 , puede relacionarse con el ángulo de la primera barra del doble péndulo a través de la ecuación

$$s_1 = \sqrt{\frac{L^2}{4} + x_B^2 - x_B L \cos \theta_1} \quad (27)$$

teniendo en cuenta que, en el ejemplo utilizado, $y_B = 0$.

La magnitud de la fuerza hidráulica ejercida por el actuador se puede evaluar como:

$$f_h = (p_1 - p_2) a_p - c \dot{s}_1 \quad (28)$$

Donde p_1 y p_2 son las presiones del fluido dentro del cilindro y a_p es el área total del pistón. Un modelo de fricción viscosa con el coeficiente c se utilizó para representar la disipación interna en el actuador; una representación simplificada se muestra en la Figura 16.

La dinámica del sistema hidráulico se puede describir con el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

$$\dot{p}_1 = \frac{\beta_1}{a_p l_1} \left[a_p \dot{s}_1 + a_i c_d \sqrt{\frac{2(p_p - p_1)}{p}} \delta_{p1} - a_0 c_d \sqrt{\frac{2(p_1 - p_T)}{p}} \delta_{T1} \right] \quad (29)$$

$$\dot{p}_2 = \frac{\beta_2}{a_p l_2} \left[-a_p \dot{s}_1 + a_0 c_d \sqrt{\frac{2(p_p - p_2)}{p}} \delta_{p2} - a_i c_d \sqrt{\frac{2(p_2 - p_T)}{p}} \delta_{T2} \right] \quad (30)$$

Donde l_1 y l_2 son las longitudes variables de las cámaras en cada lado del pistón, a_i y a_0 son las áreas variables de la válvula que conectan las cámaras del cilindro a la bomba y al tanque en el sistema hidráulico, c_d es el coeficiente de descarga de las válvulas, ρ representa la densidad del fluido, p_p y p_T son la presión hidráulica en la bomba y el tanque, respectivamente. Los coeficientes δ_{p1} , δ_{p2} , δ_{T1} y δ_{T2} son 0 cuando la cantidad dentro de la raíz cuadrada que los precede es negativa y 1 si dicha raíz es positiva. Los términos β_1 y β_2 representan el módulo de compresibilidad del fluido en cada cámara de cilindro, y se evalúan en función de la presión del fluido como

$$\beta_i = \frac{1 + a p_i + b p_i^2}{a + 2 b p_i}, \quad i = 1, 2 \quad (31)$$

Donde a y b son constantes del fluido. Asumiendo que ambas cámaras del cilindro tienen igual volumen al inicio de la simulación, las longitudes de cada cámara están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$l_1 = 0.5 l + s_{1,0} - s_1 \quad (32)$$

$$l_2 = 0.5 l + s_1 - s_{1,0} \quad (33)$$

Donde $s_{1,0}$ es la longitud inicial del actuador. Las áreas correspondientes a cada una de las válvulas a_i y a_0 se obtienen:

$$a_i = 5 \cdot 10^{-4} k \quad (34)$$

$$a_0 = 5 \cdot 10^{-4} (1 - k) \quad (35)$$

En las ecuaciones (34) y (35), $k \in [0, 1]$ es el parámetro de control de la válvula, es decir, la entrada cinemática que controla el movimiento del pistón. La maniobra simulada con este sistema consistió en un movimiento durante el cual el valor de k fue guiado cinemáticamente y dado en función del tiempo.

$$k = \begin{cases} k_0, & t \leq t_a \\ k_0 - 0.01(t - t_a)/t_r, & t_a < t \leq t_a + t_r \\ k_0 - 0.01, & t_a + t_r < t \leq t_b \\ k_0 - 0.01 + 0.03(t - t_b)/2t_r, & t_b < t \leq t_b + 2t_r \\ k_0 + 0.02, & t_b + 2t_r < t \end{cases} \quad (36)$$

Donde $t_a = 2$ s y $t_b = 6$ s, k_0 es el desplazamiento inicial de la válvula el cual tiene un valor de 0.4748, y t_r es una constante de tiempo que controla la tasa de cambio de k durante las transiciones; su valor se ajustó a $t_r = 1$ ms en este estudio. Si k_0 se ajusta para mantener el sistema en equilibrio estático, tal ley de control dará lugar a un estado estacionario mientras que $t \leq 2$ s, la extensión del actuador durante 2 s $< t \leq 6$ s, y entonces su contracción hasta t alcance el tiempo que dura la simulación. Los parámetros usados para el subsistema hidráulico se encuentran en la Tabla 2.

Tabla 2. Parámetros hidráulicos del sistema.

Área del pistón	a_p	$65 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$
Longitud del cilindro	l	0.442 m
Coeficiente de fricción	c	10^5 Ns/m
Coeficiente de descarga	c_d	0.67
Densidad del fluido	ρ	850 kg/m^3
Presión en la bomba	p_p	7.6 MPa
Presión en el tanque	p_T	0.1 MPa
Coeficiente de compresibilidad	a	$6.53 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}$
Coeficiente de compresibilidad	b	$-1.19 \cdot 10^{-18}$

Para este sistema también se utilizaron dos tipos de acoplamiento para poder comunicar al subsistema mecánico (varilla) con el hidráulico (actuador), el fuerza-desplazamiento y el presión-desplazamiento. En el acoplamiento fuerza-desplazamiento el subsistema hidráulico se encarga de calcular y enviar la fuerza f_h al subsistema mecánico. El subsistema mecánico, a su vez, se encarga de enviar la posición y la velocidad del actuador, s_1 y \dot{s}_1 , al subsistema hidráulico para que pueda evaluar sus ecuaciones (29) y (30). Con este acoplamiento es necesario usar extrapolar los inputs del subsistema hidráulico, ya que su matriz \mathbf{D} en la ecuación (5) es distinta de cero. En efecto, el subsistema hidráulico es responsable de evaluar

la fuerza del pistón en la ecuación (28), por lo que su output f_h depende de sus inputs, en concreto de \dot{s}_1 .

Por el contrario, en el acoplamiento presión-desplazamiento el subsistema hidráulico envía las presiones hidráulicas del cilindro, p_1 y p_2 al subsistema mecánico y éste es responsable de evaluar la fuerza f_h del pistón. Con este último acoplamiento mencionado no es necesario hacer uso de la extrapolación debido a que $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ en ambos subsistemas, ya que sus outputs están incluidos en el estado. Por este motivo, es de esperar que el acoplamiento presión-desplazamiento entregue resultados más precisos y estables.

4 RESULTADOS

La comparación de las estrategias de co-simulación descritas en la sección 2 se llevó a cabo con la realización de experimentos numéricos usando los ejemplos de la sección 3. Para esto, fue necesario desarrollar un entorno de co-simulación en MATLAB, en el que se realizaron los modelos dinámicos de los ejemplos y se implementaron los métodos de comunicación a evaluar. Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

4.1 Oscilador lineal de dos grados de libertad (OLDGL)

Para el oscilador lineal se utilizaron los acoplamientos de f-d (fuerza-desplazamiento) y d-d (desplazamiento-desplazamiento) como se puede observar en la Tabla 3 y en la Tabla 4. La columna “Evalúa primero” en dichas tablas indica, en los esquemas de Gauss-Seidel, qué subsistema se integró en primer lugar.

En todos los casos se llevó a cabo una simulación de 10 s de duración partiendo de las condiciones iniciales descritas en el apartado 3.1. Ambos subsistemas se integraron con una fórmula de Euler simpléctica; el mismo integrador se usó para obtener la solución monolítica de referencia:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n + h \ddot{x}_n \\ x_{n+1} &= x_n + h \dot{x}_{n+1}\end{aligned}\tag{37}$$

Tabla 3. OLDGL, esquema single-rate, $H = h_1 = h_2 = 1$ ms.

Esquema	Variables	Evalúa primero	Extrapolación SS ₁	Extrapolación SS ₂
Jacobi	f-d		ZOH	ZOH
Jacobi	d-d		ZOH	ZOH
Gauss-Seidel	f-d	SS ₁	ZOH	ZOH
Gauss-Seidel	f-d	SS ₂	ZOH	ZOH
Gauss-Seidel	d-d	SS ₁	ZOH	ZOH
Gauss-Seidel	d-d	SS ₂	ZOH	ZOH

En dichas tablas SS₁ se utiliza para referirse al subsistema 1 y SS₂ se utiliza como referencia para el subsistema 2. Se debe aclarar también que H es el paso de tiempo global donde ambos subsistemas intercambian las variables, mientras que h_1 y h_2 son los pasos de tiempo de integración para cada uno de los subsistemas.

Para el OLDGL se obtuvieron como resultados las posiciones y velocidades de cada uno de los subsistemas y también se evaluó la energía mecánica del conjunto, dado que en ella se reflejan claramente los errores que se introducen en el sistema durante la simulación. A estos parámetros de cada una de las co-simulaciones se les comparó con la solución analítica calculada para así determinar la precisión de cada algoritmo de co-simulación.

Tabla 4. OLDGL, esquema multi-rate, $H = h_1 = 1$ ms, $h_2 = 0.1$ ms.

Esquema	Variables	Evalúa primero	Extrapolación SS ₁	Extrapolación SS ₂
Jacobi	f-d		ZOH	ZOH
Jacobi	f-d		ZOH	FOH u_2
Jacobi	f-d		FOH y_1	ZOH
Jacobi	f-d		FOH y_1	FOH u_2
Jacobi	d-d		ZOH	FOH u_2
Gauss-Seidel	f-d	SS ₁	ZOH	FOH u_2
Gauss-Seidel	f-d	SS ₂	ZOH	FOH u_2
Gauss-Seidel	d-d	SS ₁	ZOH	FOH u_2
Gauss-Seidel	d-d	SS ₂	ZOH	FOH u_2

Antes de comenzar a explicar resultados de las co-simulaciones es importante exponer lo que se obtuvo como energía mecánica del OLDGL según la solución monolítica y la analítica del sistema mencionado. De esta manera estarán presentes las soluciones con la que se comparan todos los resultados obtenidos de las co-simulaciones. El oscilador lineal es conservativo para el caso en que las constantes de todos los amortiguadores son cero; por tanto, la energía mecánica total del sistema debería permanecer constante durante la integración numérica.

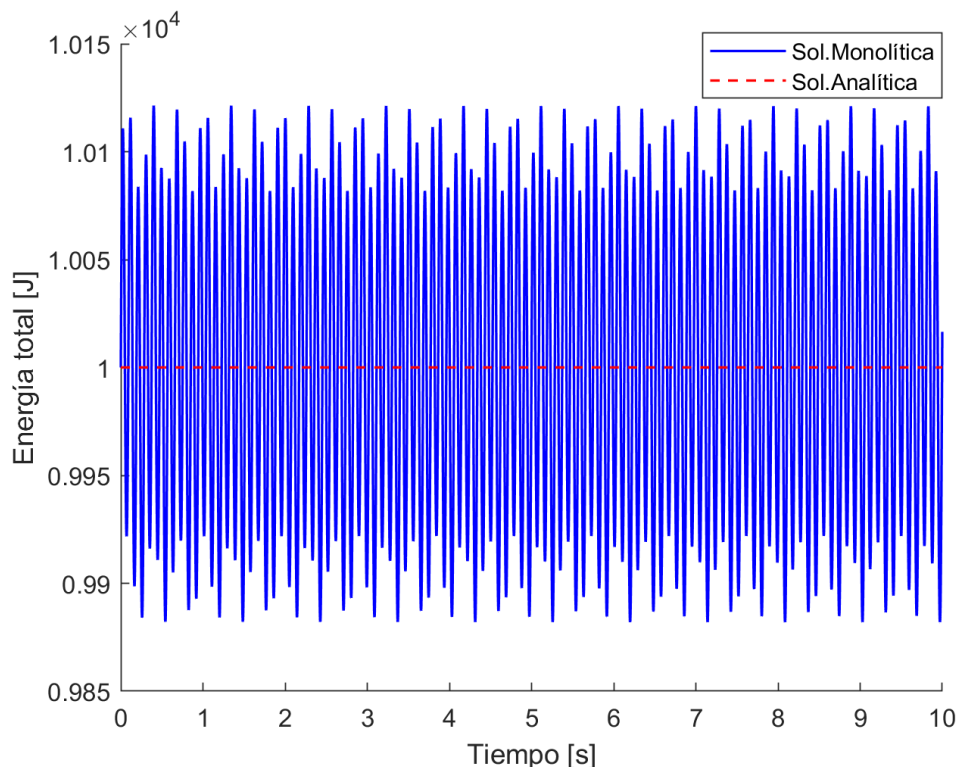


Figura 17. Energía mecánica solución numérica y solución analítica.

En la Figura 17 se puede ver que la energía mecánica de la solución analítica se mantiene prácticamente constante, hay pequeñas variaciones realmente son imperceptibles. Por otro lado, se tiene que la energía mecánica hallada con la solución monolítica no es constante, al contrario, cambia de valor constantemente pero aun así se mantiene dentro de un rango

definido entre 125 J por arriba y por debajo del valor de 10000 J el cual es el valor que según la solución analítica debería tener.

De las co-simulaciones realizadas en single-rate es destacable mencionar que entre los resultados obtenidos se observó que si es utilizado un esquema Gauss-Seidel no existen diferencias significativas en las respuestas entre los esquemas de fuerza-desplazamiento y desplazamiento-desplazamiento siempre que las demás técnicas empleadas para programar la co-simulación sean las mismas.

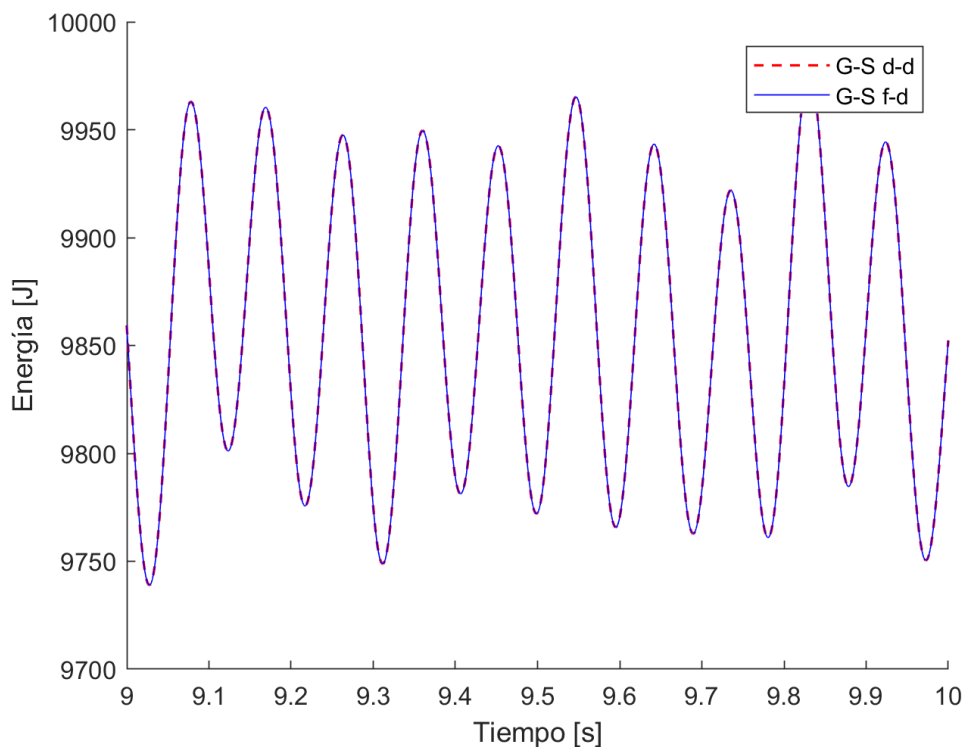


Figura 18. Energía mecánica, G-S (SS_1 evaluado primero), comparación entre f-d y d-d.

Tanto en la Figura 18 como en la Figura 19 se observa cómo las líneas que representan cada una de las co-simulaciones se solapan entre sí confirmando lo mencionado anteriormente.

En términos de conservación de la energía, el peor resultado obtenido en single-rate es el del esquema Jacobi f-d representado en la Figura 20. El acoplamiento f-d hace obligatorio el uso de la extrapolación debido a que la matriz de transmisión directa del subsistema 2 es $D \neq 0$. Los resultados mostrados en la Figura 20 confirman el hecho de que el uso de un tipo de extrapolación incorrecto introduce errores en el sistema lo cual se ve representado en la acumulación de energía del sistema, algo que demuestra que la co-simulación da lugar a un incremento de la energía mecánica del sistema. Aunque la Figura 20 muestra resultados para el caso en que la extrapolación de los inputs del SS_2 se llevó a cabo con un ZOH, el uso de FOH no se tradujo en mejoras significativas de la precisión del proceso.

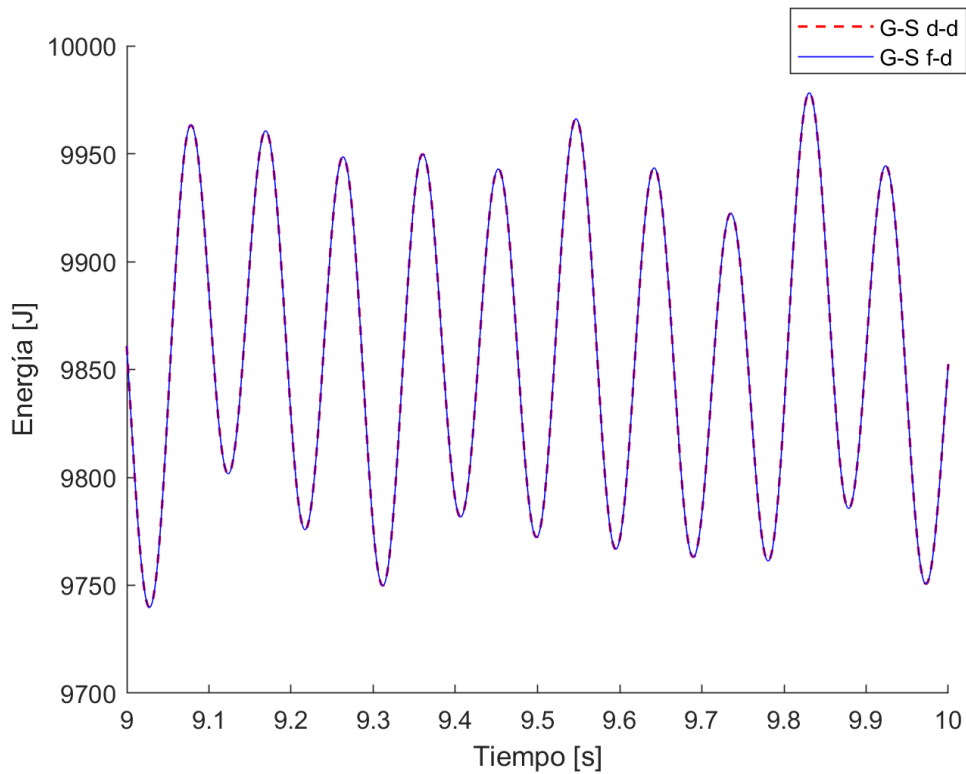


Figura 19. Energía mecánica, G-S (SS_2 evaluado primero), comparación entre f-d y d-d.

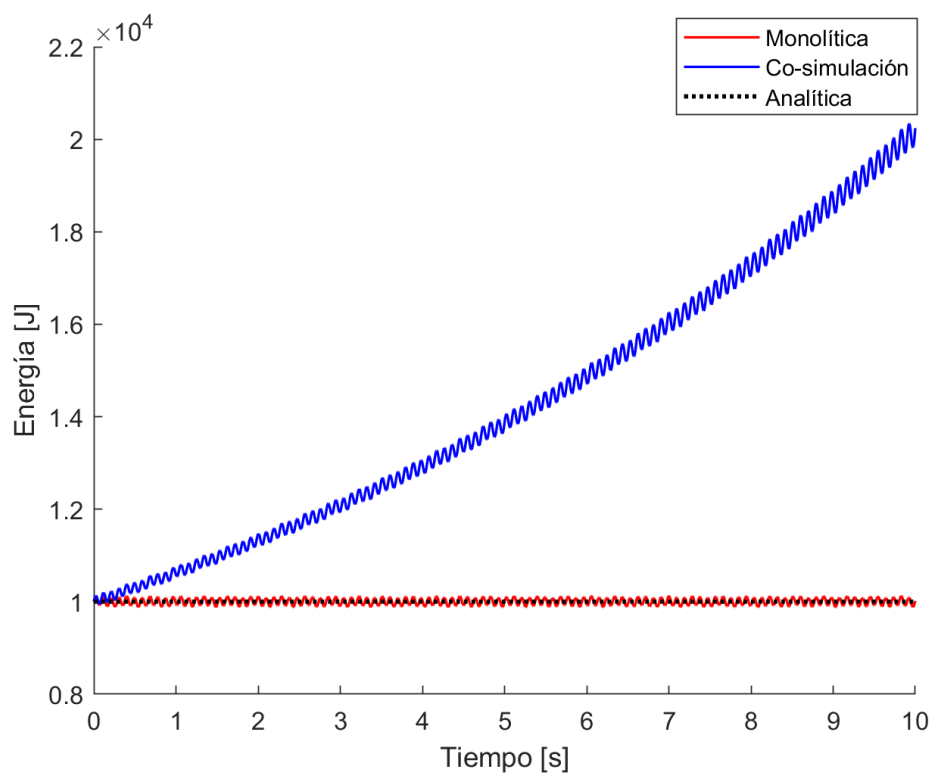


Figura 20. Energía mecánica, método single-rate esquema Jacobi f-d; se utilizó ZOH para extrapolar los inputs de SS_2 .

En single-rate el comportamiento del esquema Jacobi mejoró notablemente usando un acoplamiento desplazamiento-desplazamiento en lugar de un fuerza-desplazamiento, como

se puede ver en la Figura 21. Esto confirma lo mencionado anteriormente, cuando los outputs no dependen de los inputs en ese instante ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$) y no se usa la extrapolación para predecir valores de dichos inputs, el resultado obtenido será más preciso. No siempre el uso de la extrapolación perjudicará los resultados, como se verá a continuación: si se encuentra el tipo adecuado de extrapolación para el sistema que se está estudiando esto contribuirá a obtener una respuesta más precisa.

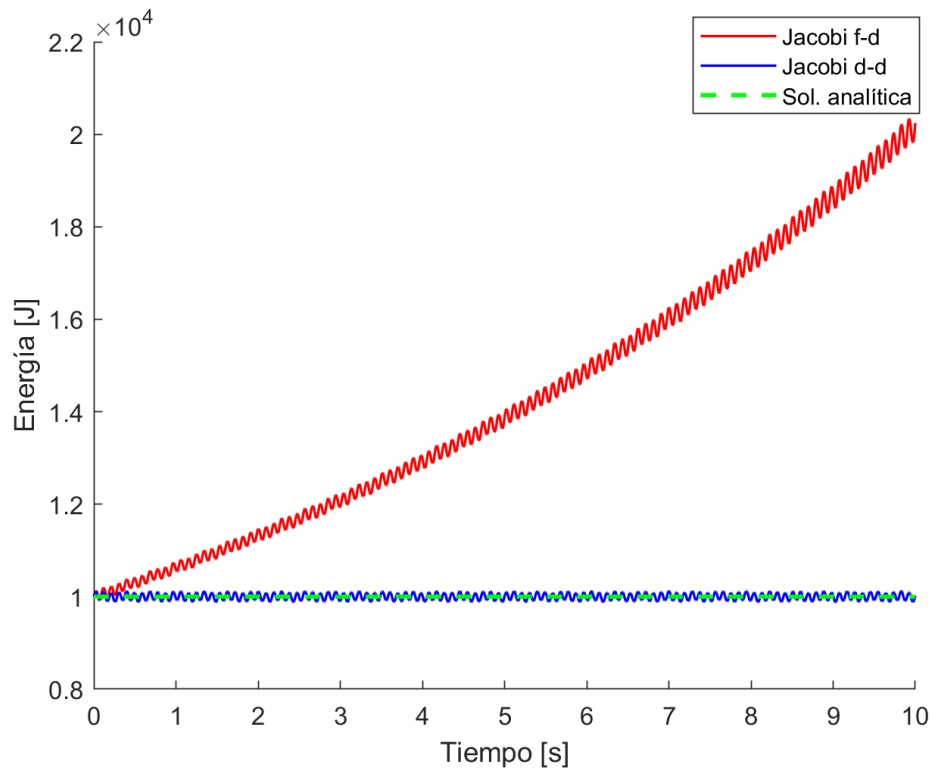


Figura 21. Comparación de la energía mecánica del oscilador lineal usando esquema Jacobi en single-rate, para acoplamientos f-d y d-d.

Los experimentos numéricos revelaron también que el esquema Gauss-Seidel no es completamente inmune a la acumulación de errores. Ésta se manifiesta de una manera distinta a la observada en el esquema Jacobi de la Figura 20. Se ha observado que los esquemas Gauss-Seidel tienden a disipar la energía del sistema, como se muestra en la Figura 22 y en la Figura 23. Sin embargo, la disipación de energía no es de la misma magnitud que la acumulación de esta en un esquema Jacobi con acoplamiento f-d equivalente. En algunos casos puede ser preferible una co-simulación que disipe energía a una que la acumule, puesto que la simulación resultante será más estable. En algunas aplicaciones en que la precisión de los resultados es de importancia secundaria con respecto a la estabilidad, tales como simuladores industriales o entornos hápticos de baja fidelidad, esta puede ser una característica deseable. Los resultados obtenidos confirman que un esquema Gauss-Seidel suele ser más estable y preciso que el esquema Jacobi cuando la matriz de transmisión directa en algún subsistema de este último (\mathbf{D}) es distinta de $\mathbf{0}$. Sin embargo, utilizar esquemas tipo Gauss-Seidel impide la paralelización de la ejecución del código, por lo que la elección de uno u otro esquema dependerá de la aplicación concreta en la que se usará la co-simulación.

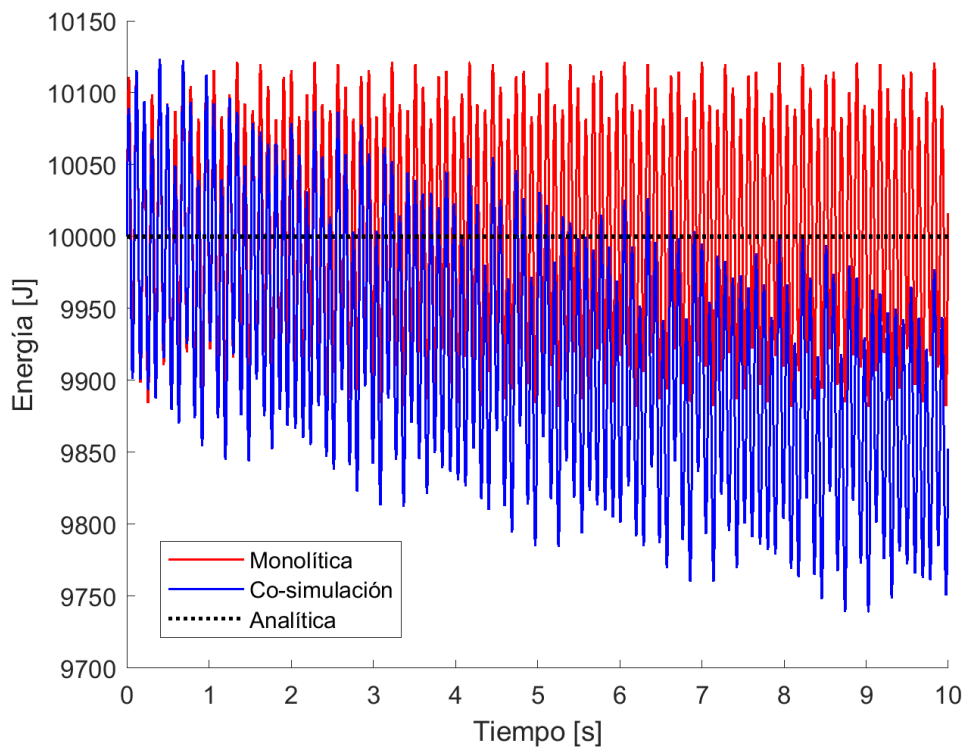


Figura 22. Energía mecánica del oscilador lineal para una co-simulación single-rate con esquema Gauss-Seidel con acoplamiento f-d y el SS_1 evaluado primero.

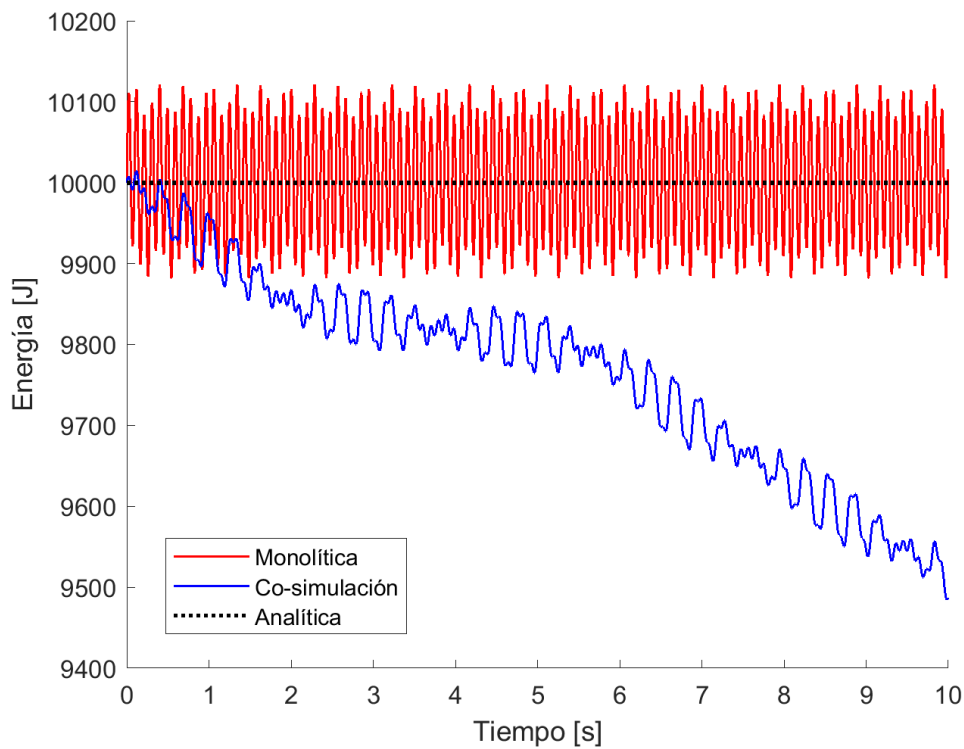


Figura 23. Energía entregada para una co-simulación multi-rate con esquema Gauss-Seidel con acoplamiento f-d y el SS_1 evaluado primero.

Observando los resultados obtenidos con el esquema Jacobi en single-rate usando un acoplamiento f-d podría esperarse que los resultados que se obtengan utilizando multi-rate sean aún menos precisos, pero como se observa en la Figura 24 esto no es así. En multi-rate el SS_2 (considerado el subsistema rápido) hará cálculos en pasos de tiempo pequeños de 0.1 ms mientras que el SS_1 realizará los mismos cálculos que en single-rate porque posee el mismo paso de tiempo de comunicación de 1 ms. Por el motivo de que el paso de tiempo H (tiempo de intercambio de variables) se mantiene igual y lo único que se disminuye es el paso de tiempo h_2 los resultados que se obtienen no son peores que en un single-rate, pero aun así siguen siendo muy imprecisos.

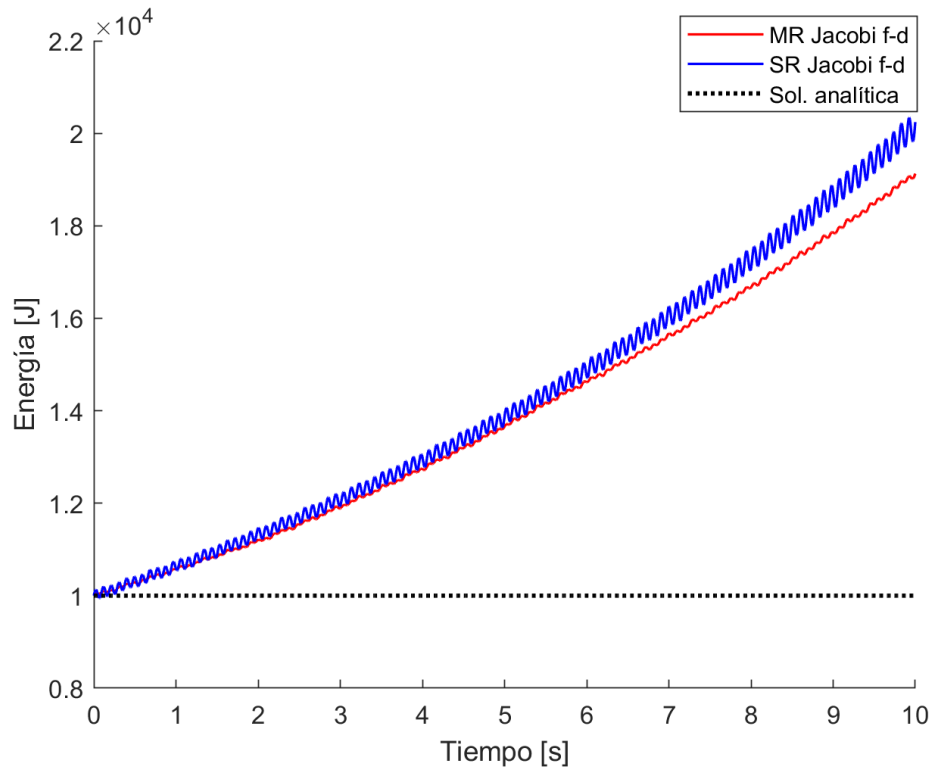


Figura 24. Comparación de energía entre multi-rate (MR) y single-rate (SR) usando un esquema Jacobi y acoplamiento f-d.

Después de haber hecho pruebas sobre este sistema con la extrapolación ZOH se quiso comprobar el efecto que tendría utilizar otro tipo de extrapolación sobre el esquema Jacobi con acoplamiento f-d debido a que esta co-simulación es de la que peores resultados se obtuvo. Se realizó primero una extrapolación interna en el SS_1 del tipo FOH para el input de dicho subsistema y se consiguió mejorar el resultado con respecto a la extrapolación del tipo ZOH como se puede ver en la Figura 25. Aunque se consiguió mejorar el resultado aun así esta co-simulación sigue acumulando errores y por tanto es imprecisa.

Se aplicó como segunda prueba mantener para el SS_1 una extrapolación ZOH y aplicar una extrapolación externa del tipo FOH en el input del SS_2 . De esta manera se supondrá que el comportamiento del SS_1 es lineal y así se intenta predecir los inputs que recibiría el SS_2 en pasos de tiempo menores al paso de tiempo H . Los resultados son los que se pueden ver en la Figura 26 donde se observa que son aún más imprecisos que si se utiliza una extrapolación interna como la de la Figura 25 y no mejoran prácticamente en nada a una co-simulación con extrapolaciones del tipo ZOH como las observadas en la Figura 24.

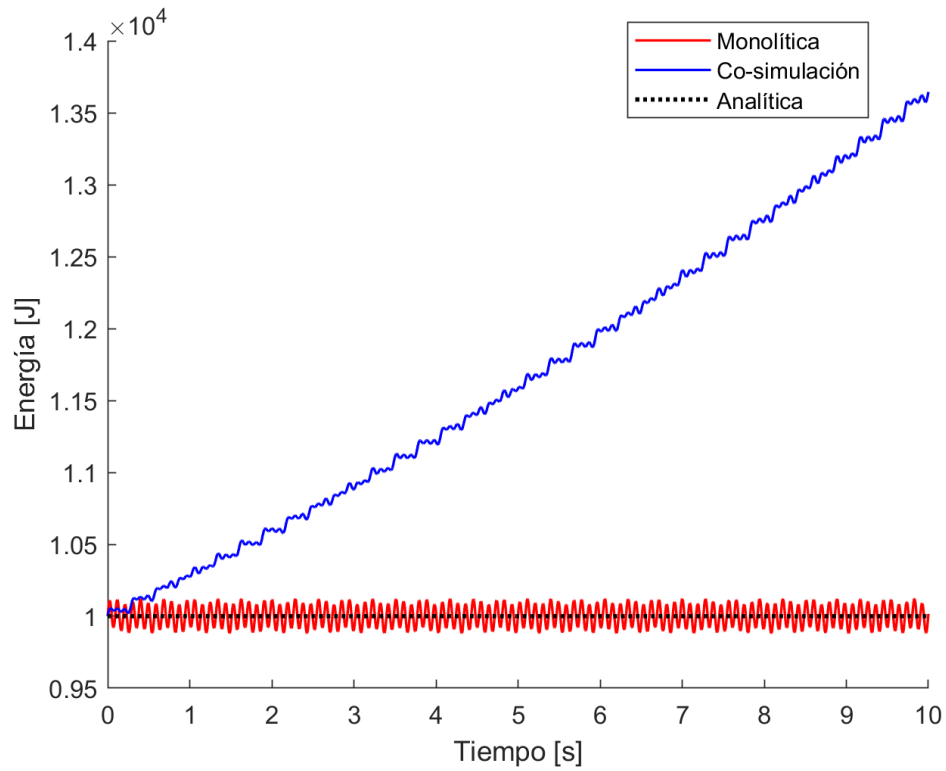


Figura 25. Energía obtenida con co-simulación multi-rate (MR) esquema Jacobi acoplamiento f-d y extrapolación interna del tipo FOH para el input del SS₁.

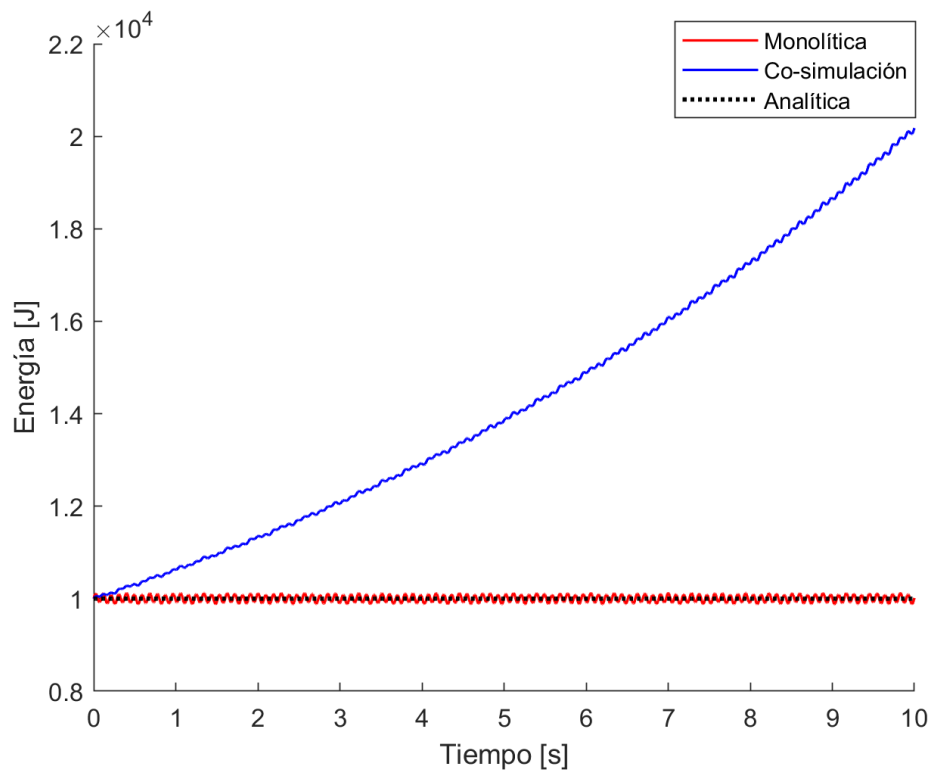


Figura 26. Energía obtenida con co-simulación multi-rate (MR) esquema Jacobi acoplamiento f-d y extrapolación externa del tipo FOH para el input del SS₂.

Por último, se realizó una combinación de las dos extrapolaciones ya vistas en una misma co-simulación y se obtuvieron resultados precisos, de hecho, dicha programación entregó la respuesta mostrada en la Figura 27 que se comporta aún mejor que la solución monolítica. Estos resultados muestran que el uso de una técnica de extrapolación adecuada puede mejorar significativamente la precisión del esquema de co-simulación. Por otra parte, resaltan también la dificultad de determinar a priori qué configuración de la interfaz de co-simulación es la más adecuada para obtener los resultados más precisos.

Los resultados de la Figura 27 se obtuvieron para un esquema de Jacobi con acoplamiento f-d. Por otra parte, el acoplamiento d-d ha mostrado resultados mejores que el f-d en lo que se refiere a conservación de la energía (Figura 22 y Figura 23). Cabe entonces preguntarse si el uso de una extrapolación adecuada mejorará los resultados del esquema de acoplamiento d-d.

Sin embargo, aplicar una extrapolación del tipo FOH para el input del SS_1 en un esquema Jacobi con un acoplamiento d-d carece de sentido por los motivos explicados en segmentos anteriores de la memoria. En el acoplamiento d-d del OLDGL los outputs de cada subsistema son independientes de los inputs que reciben en el mismo instante de tiempo. Por tanto, si se realiza una extrapolación en este caso no se estaría comunicando información del instante actual sino una predicción del instante de tiempo siguiente lo cual carece de sentido para este estudio.

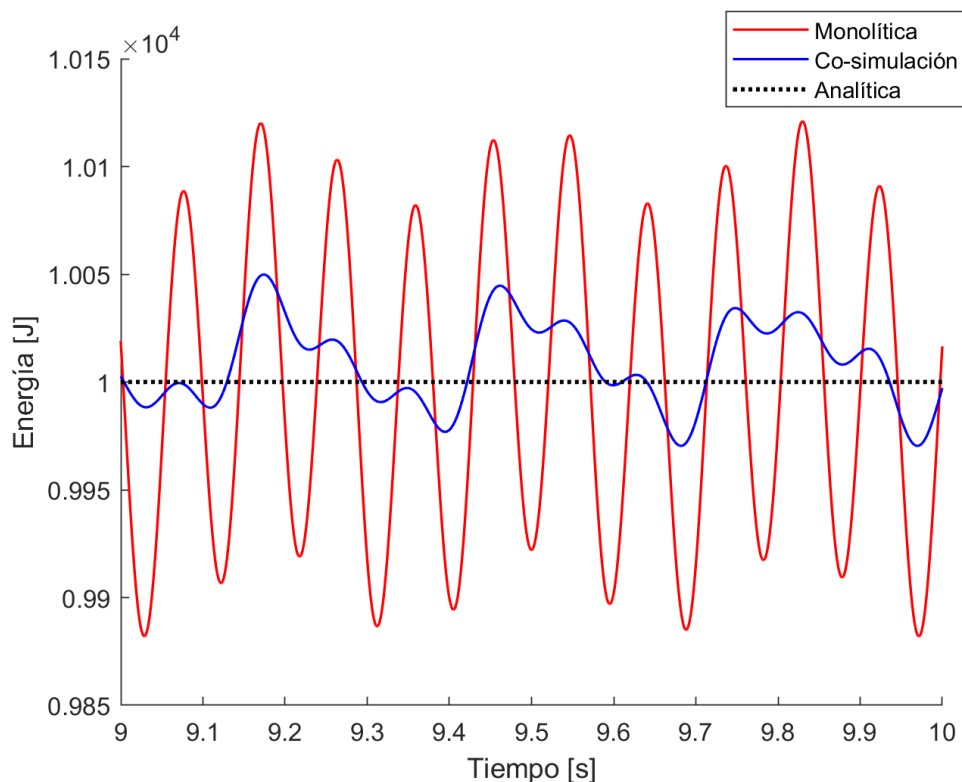


Figura 27. Energía obtenida en co-simulación multi-rate (MR) esquema Jacobi acoplamiento f-d con extrapolación externa del tipo FOH para el input del SS_2 y extrapolación interna del tipo FOH para el input del SS_1 .

Al no poder aplicar ambas extrapolaciones al esquema Jacobi con acoplamiento d-d se le aplicó entonces la extrapolación externa del tipo FOH para el input del SS_2 la cual se realiza solo con fines de que el SS_2 tenga información del otro subsistema entre pasos de tiempo de comunicación y se obtienen los resultados de la Figura 28. En dichos resultados se puede ver que también se obtiene una mejor respuesta que la solución monolítica lo que demuestra que

se han conseguido dos métodos de co-simulación precisos para este sistema, aunque habría que mencionar que la co-simulación en la Figura 28 manifiesta una cierta tendencia a disipar la energía del sistema.

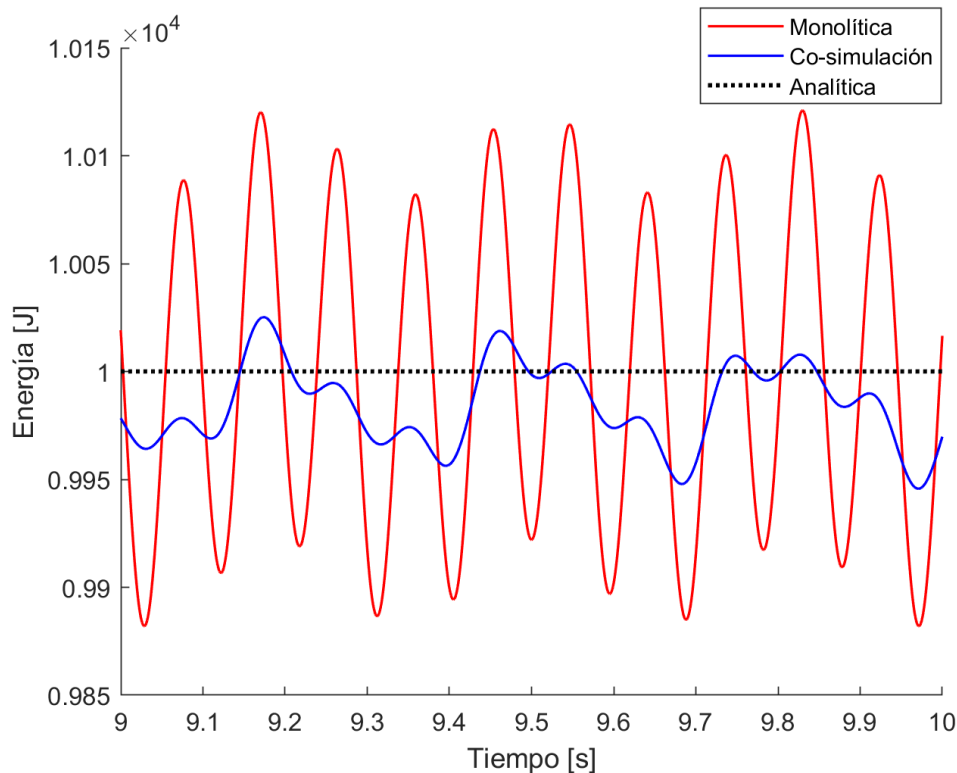


Figura 28. Energía obtenida en co-simulación MR esquema Jacobi acoplamiento d-d y extrapolación externa del tipo FOH para el input del SS₂.

4.2 Grúa hidráulica

En el caso de la grúa hidráulica descrita en la sección 4.2, se realizaron simulaciones para representar el movimiento del sistema durante 10 segundos, con la ley de actuación de la válvula hidráulica definida en la ecuación (36). Esta actuación corresponde a un reposo inicial del sistema, en el que la fuerza del pistón hidráulico mantiene el sistema en equilibrio estático. A partir de $t = 2$ s se incrementa la fuerza del actuador y la grúa gira en sentido antihorario. En $t = 6$ s se disminuye la fuerza y la grúa gira en sentido contrario, disminuyendo también la longitud del actuador. La integración de la dinámica de ambos subsistemas, mecánico e hidráulico, se llevó a cabo con la fórmula de Euler simpléctica mostrada en la ecuación (37).

Se realizaron varias co-simulaciones utilizando tanto distintos acoplamientos (presión-desplazamiento (p-d) y fuerza-desplazamiento (f-d)) como también distintos tipos de extrapolación como los que se pueden ver en la Tabla 5 y la

Tabla 6. En estas tablas al igual que para el OLDGL existe un parámetro llamado “Evalúa primero” que afecta solo a las co-simulaciones con esquema Gauss-Seidel. Dicho parámetro realiza la función de mostrar cuál de los subsistemas implicados realiza antes su integración para luego enviar sus outputs al otro subsistema como fue explicado en la sección 2.1.2.

Tabla 5. Grúa hidráulica esquema single-rate, $H = 0.2$ ms.

Esquema	Variables	Evalúa primero	Extrapolación Mec	Extrapolación Hid
Jacobi	f-d		ZOH	ZOH
Gauss-Seidel	f-d	Mecánico	ZOH	ZOH
Gauss-Seidel	f-d	Hidráulico	ZOH	ZOH
Jacobi	p-d		ZOH	ZOH
Gauss-Seidel	p-d	Mecánico	ZOH	ZOH
Gauss-Seidel	p-d	Hidráulico	ZOH	ZOH

Tabla 6. Grúa hidráulica esquema multi-rate $H = h_1 = 4$ ms y $h_2 = 0.2$ ms.

Esquema	Variables	Evalúa primero	Extrapolación Mec	Extrapolación Hid
Jacobi	f-d		ZOH	ZOH
Gauss-Seidel	f-d	Mecánico	ZOH	ZOH
Gauss-Seidel	f-d	Hidráulico	ZOH	ZOH
Jacobi	f-d		ZOH	FOH
Gauss-Seidel	f-d	Mecánico	ZOH	FOH
Gauss-Seidel	f-d	Hidráulico	ZOH	FOH
Jacobi	p-d		ZOH	ZOH
Gauss-Seidel	p-d	Mecánico	ZOH	ZOH
Gauss-Seidel	p-d	Hidráulico	ZOH	ZOH
Jacobi	p-d		ZOH	FOH
Gauss-Seidel	p-d	Mecánico	ZOH	FOH
Gauss-Seidel	p-d	Hidráulico	ZOH	FOH

A diferencia del OLDGL en este sistema no se tenía la referencia de la solución analítica debido a que no es posible hallarla. Por tanto, es necesario obtener una solución de referencia por convergencia de los distintos métodos utilizados. Si todos los métodos de co-simulación convergen hacia una solución común conforme se disminuyen la tolerancia y el paso de tiempo de integración, puede aceptarse la solución así obtenida como solución de referencia.

En este ejemplo, se realizó la simulación del movimiento de la grúa hidráulica usando co-simulación multi-rate (con $H = h_1$) y disminuyendo el paso de tiempo hasta $H = 0.2$ ms, momento en que las variaciones en el resultado se volvieron inapreciables. Los resultados obtenidos con acoplamiento f-d y p-d, con extrapolación de tipo ZOH y esquema de Jacobi fueron prácticamente idénticos. Por tanto, se escogieron dichos resultados como referencia para el resto de experimentos numéricos llevados a cabo.

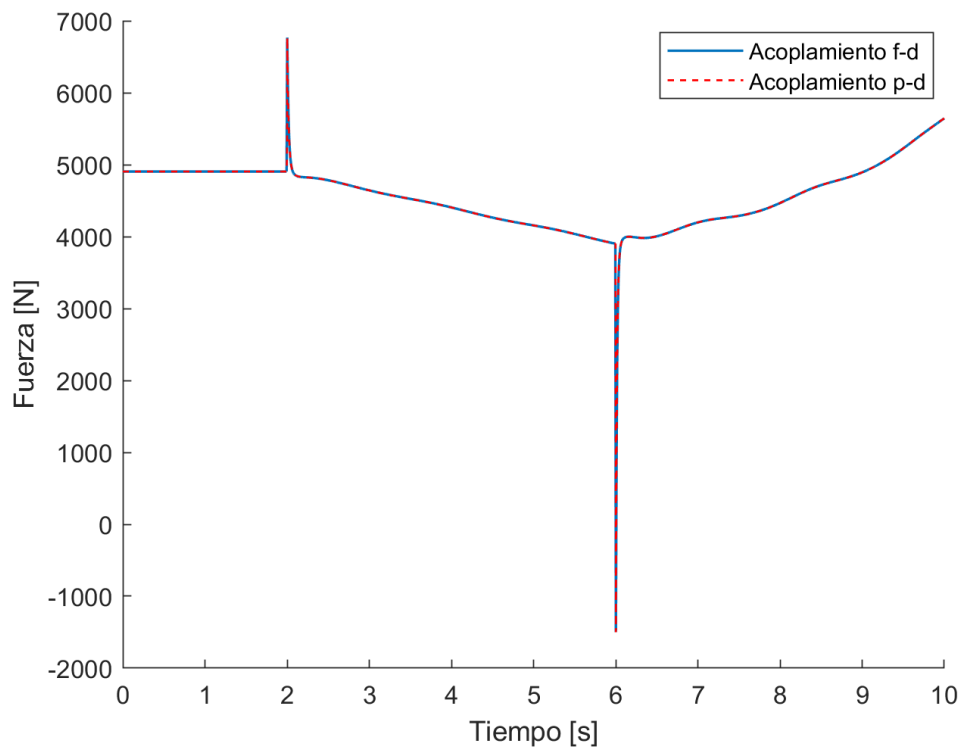


Figura 29. Fuerza del actuador con acoplamientos f-d y p-d y esquema Gauss-Seidel con la hidráulica evaluada primero.

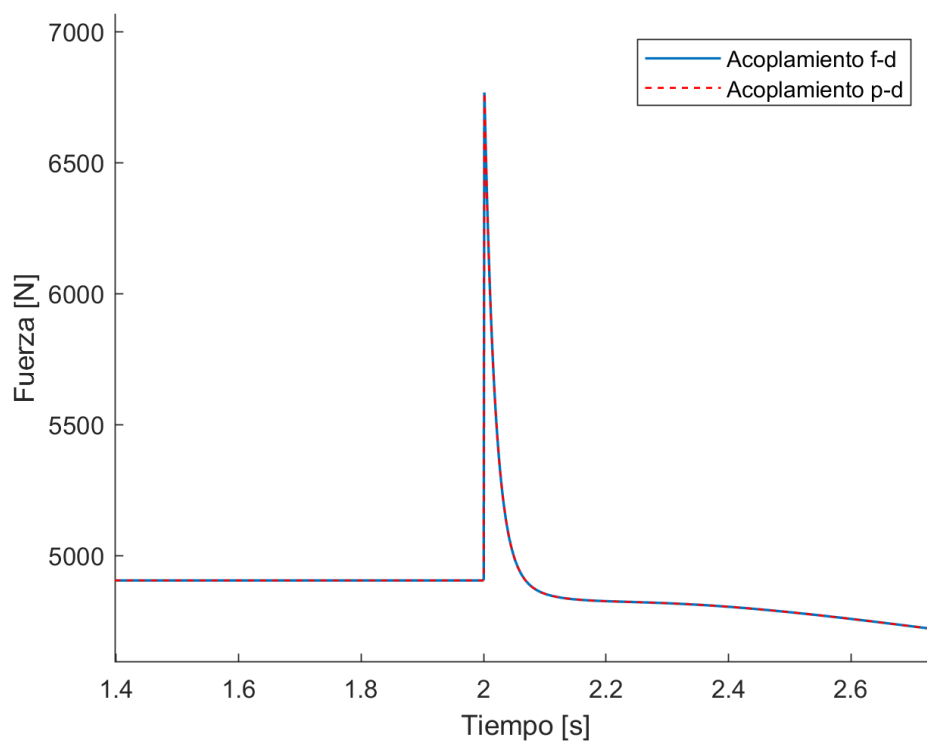


Figura 30. Detalle de la fuerza del actuador en $t = 2$ s con acoplamientos f-d y p-d y esquema Gauss-Seidel con la hidráulica evaluada primero (acercamiento).

Al obtener los resultados de las programaciones realizadas se observó nuevamente que si se utiliza en single-rate un esquema Gauss-Seidel no importa qué variables (f-d o p-d) se intercambien entre los subsistemas, mientras los otros parámetros de co-simulación sean los mismos, se obtendrá que ambas respuestas convergen en la misma solución. Esto se puede observar en la Figura 30 y en la Figura 31 donde se muestran los resultados de la fuerza del actuador y la posición s_1 respectivamente en un esquema Gauss-Seidel con la hidráulica evaluada en primer lugar.

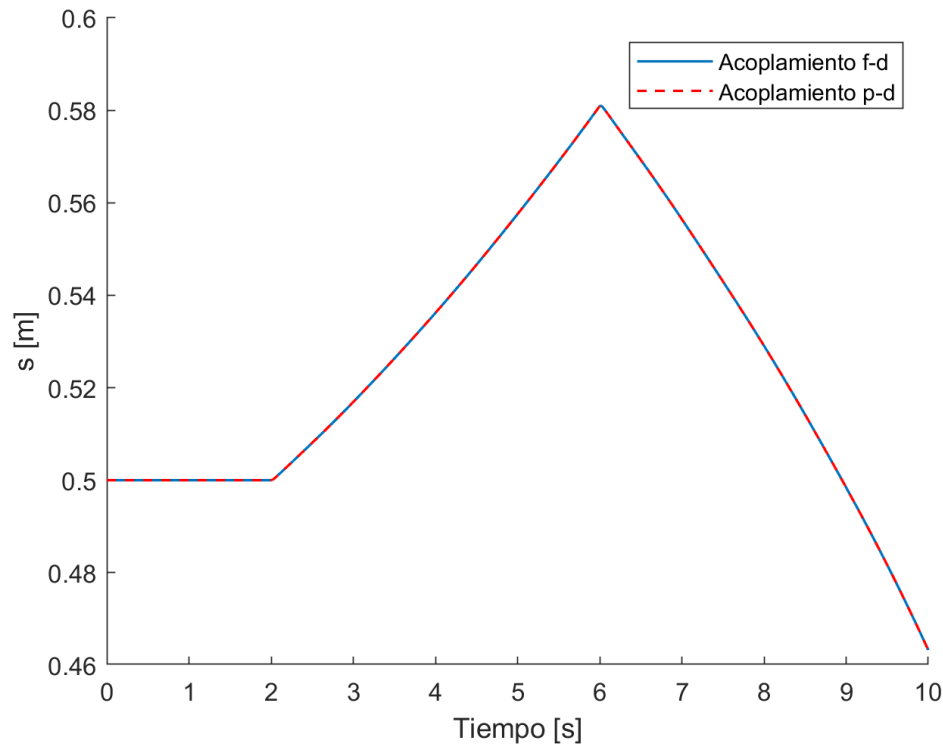


Figura 31. Comparación de la posición en acoplamientos f-d y p-d para esquema Gauss-Seidel con el subsistema hidráulico evaluado primero.

Es importante mencionar el hecho de que, si en las co-simulaciones realizadas en multi-rate se aplican las mismas herramientas de simulación con la única diferencia de usar esquemas distintos como lo son el Jacobi y el Gauss-Seidel, las respuestas obtenidas en ambos casos son la misma aproximadamente, pero poseen un desfase en el tiempo entre ellas. Esto se considera también un error y de ser posible se debe elegir la co-simulación que posea un menor desfase con respecto a la solución de referencia. Para demostrar lo mencionado se muestra una comparación en la Figura 32 entre las co-simulaciones realizadas con el método multi-rate usando una extrapolación del tipo ZOH en ambos subsistemas y un acoplamiento p-d. Esta figura muestra que la evaluación de la hidráulica primero en un esquema de Gauss-Seidel introduce un desfase entre la solución obtenida y la solución de referencia.

Uno de los objetivos de los estudios realizados es confirmar que si se tiene un acoplamiento en el cual los outputs de ambos subsistemas no dependen de los inputs que reciban en ese instante de tiempo se obtendrá una co-simulación más precisa y estable. Al tener un paso de tiempo reducido, si se compara entre co-simulaciones programadas bajo las mismas condiciones teniendo como única diferencia el acoplamiento utilizado la diferencia entre las respuestas de cada modelo es insignificante. Por tanto, se utilizó un paso de tiempo $H = 15$ ms para realizar una comparación más detallada.

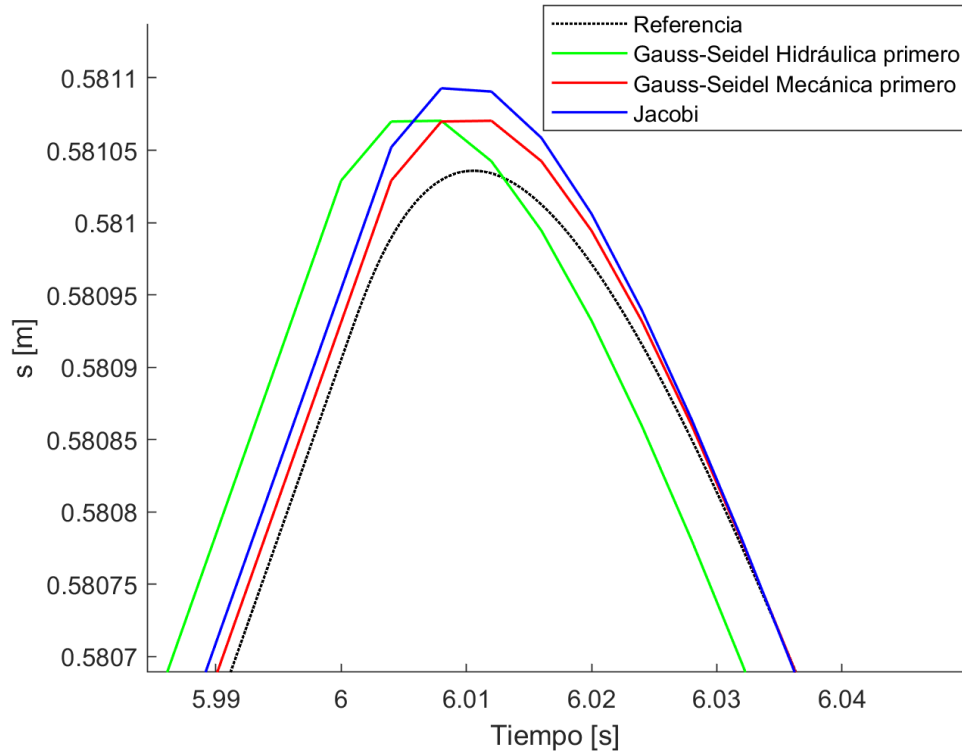


Figura 32. Comparativa de desfase en longitud del actuador de distintos esquemas co-simulados en multi-rate, con un acoplamiento del tipo p-d.

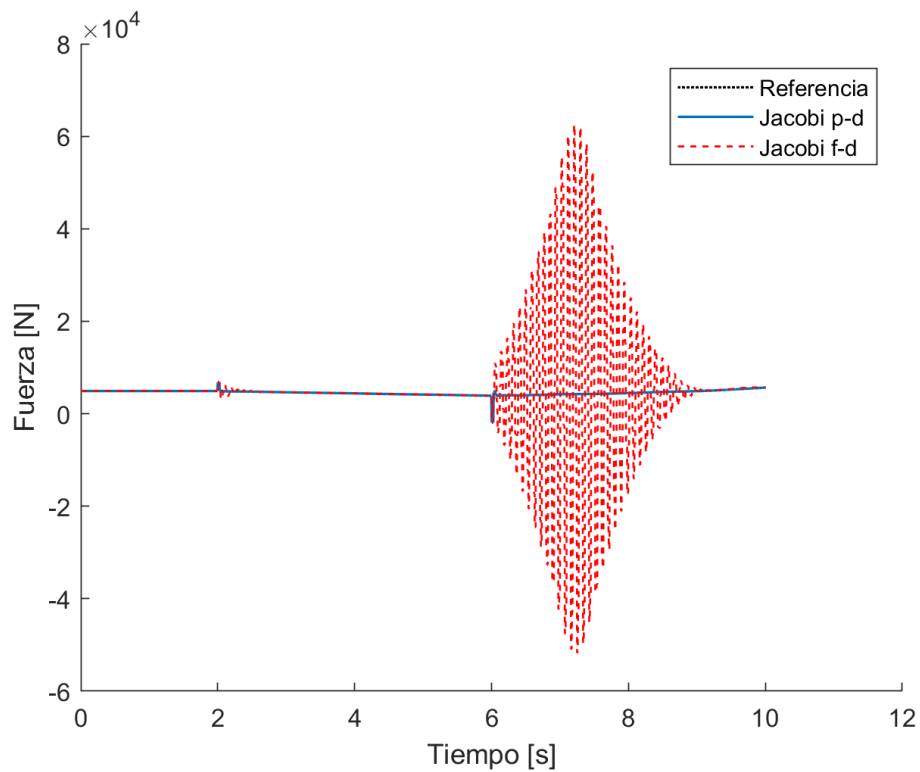


Figura 33. Comparación de la fuerza de acoplamiento obtenida con esquemas f-d y p-d usando esquema Jacobi con extrapolación ZOH para ambos subsistemas, con un paso de comunicación $H = 15$ ms.

La comparación se realizó en multi-rate usando un esquema Jacobi programado con extrapolaciones para ambos subsistemas del tipo ZOH y los resultados fueron los esperados. La co-simulación realizada con el acoplamiento f-d es claramente más inestable e imprecisa que la programada usando el acoplamiento p-d, tal y como se refleja claramente en la Figura 34 y en la Figura 35. La capacidad que tiene una co-simulación realizada con un método multi-rate de agrandar su paso de tiempo H y seguir siendo suficientemente precisa es un aspecto muy importante y beneficioso. Por lo cual, siempre que sea posible, se deben evitar co-simulaciones donde un subsistema posea una matriz de transmisión directa distinta de 0 ($\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$) porque el uso de extrapolación introduce errores a lo largo de la simulación.

La Figura 34 muestra en detalle la fuerza ejercida por el actuador en $t = 2$, cuando cambia el parámetro de control de la válvula del pistón y la actuación hidráulica pasa de mantener el equilibrio estático del sistema a incrementar la longitud del cilindro. En la figura se observa cómo el cambio brusco en la actuación de la válvula produce un incremento instantáneo de la fuerza del actuador. La solución de referencia converge rápidamente a un valor estable después del pico de fuerza inicial. Los resultados obtenidos con co-simulación multi-rate y $H = 15$ ms muestran un comportamiento oscilatorio, aunque estable. Se observa que el acoplamiento f-d tarda un tiempo considerable en volver a acercarse a la solución de referencia. Por el contrario la respuesta obtenida usando el acoplamiento p-d -aunque no se mantiene siempre en convergencia con la solución de referencia- tarda un tiempo más reducido en eliminar el comportamiento oscilatorio introducido en la solución.

En la Figura 35 se muestra otro detalle de la fuerza del actuador en $t = 6$ s, cuando el pistón hidráulico pasa de incrementar su longitud a disminuirla. En ella se puede observar que la co-simulación con acoplamiento f-d es completamente imprecisa para el comportamiento después de dicho punto de cambio. Se comprueba entonces que un acoplamiento donde $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$ para alguno de los subsistemas con un paso de tiempo H considerablemente grande entregará una respuesta imprecisa e inestable. En la Figura 33 se puede confirmar todo lo anteriormente mencionado, en dicha figura se observan los valores que llega a alcanzar la fuerza para un acoplamiento f-d comparando con los valores que debería tomar según la solución de referencia.

Lo importante de que una co-simulación permita tener un paso de tiempo de comunicación entre subsistemas H mayor es que el tiempo de cálculo de las simulaciones se logra disminuir considerablemente cuanto mayor sea dicho paso de tiempo. Las co-simulaciones realizadas en este trabajo se programaron para una duración de 10 segundos porque dicha duración es suficiente para conocer el comportamiento de cada uno de los modelos realizados. En la realidad las aplicaciones que tiene la co-simulación tienen una duración mucho mayor a la mencionada por lo que el tiempo de cálculo es un parámetro muy importante.

Como se comprobó anteriormente la co-simulación Jacobi con acoplamiento p-d mostrada en la Figura 33 tiene una respuesta bastante precisa y estable con un paso de tiempo mayor. En la Tabla 7 se muestra una comparación de los tiempos de cálculo necesarios para distintos pasos de tiempo de comunicación H . Además en dicha tabla para los distintos pasos de tiempo H también se muestran los errores absolutos existentes para la posición s_1 .

Los tiempos de cálculo que se muestran en la Tabla 7 corresponden a la ejecución del código en un ordenador portátil con procesador i7-8550U @1.8 GHz y 16 GB de RAM, sobre Matlab R2017b en un entorno Windows 10 de 64 bits.

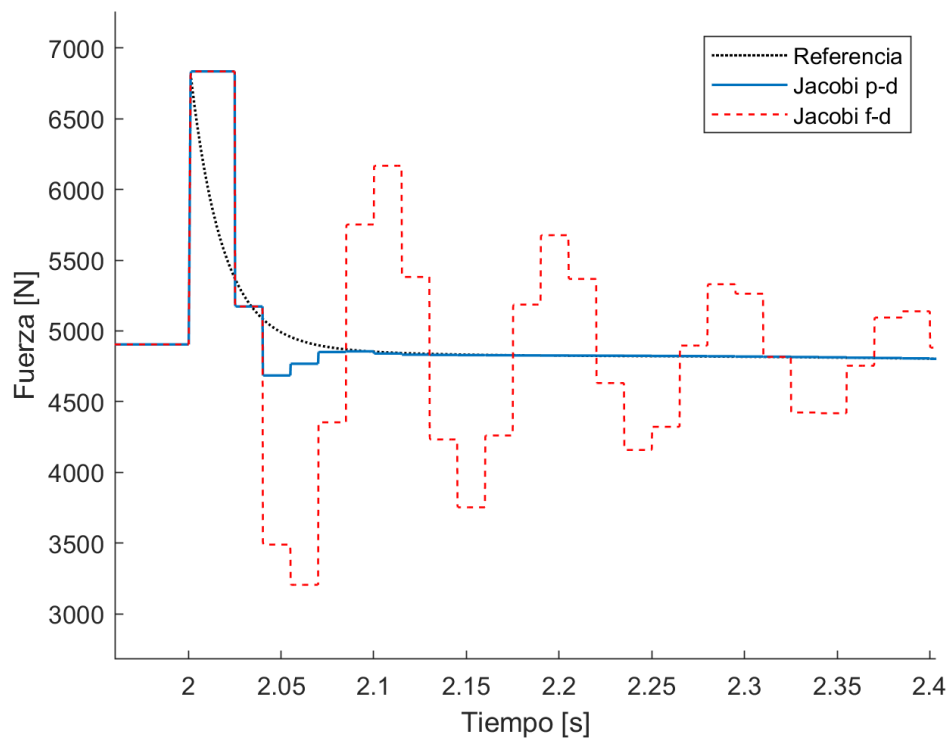


Figura 34. Detalle de la fuerza de acoplamiento tras $t=2$ s con esquemas f-d y p-d usando esquema Jacobi con extrapolación ZOH para ambos subsistemas, con un paso de comunicación $H=15$ ms.

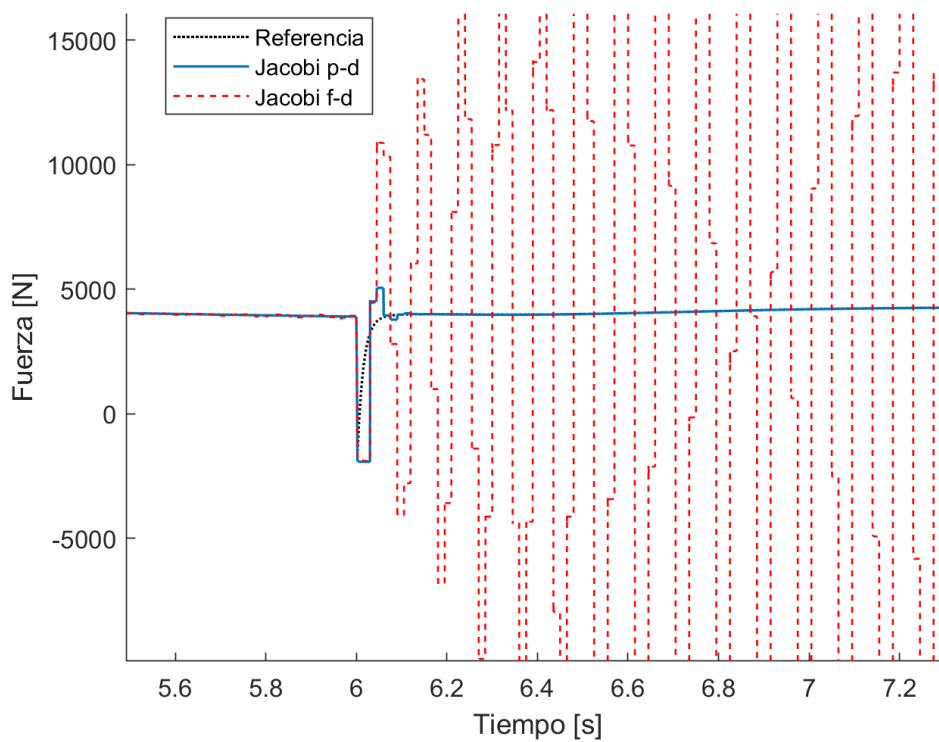


Figura 35. Detalle de la fuerza de acoplamiento tras $t=6$ s con esquemas f-d con el p-d usando esquema Jacobi con extrapolación ZOH para ambos subsistemas con un paso de comunicación $H=15$ ms.

Tabla 7. Tiempos de cálculo y errores de posición para co-simulación multi-rate con esquema Jacobi acoplamiento p-d y extrapolación del tipo ZOH en ambos subsistemas.

Paso de comunicación H [ms]	Tiempo de cálculo [s]	Error en posición [mm]
0.2 (single-rate)	227.85	0 (referencia)
4	2.25	0.092
10	1.35	0.226
16	1.12	0.459

Con la Tabla 7 se comprueba que, a mayor tiempo de comunicación H , más imprecisa es la co-simulación. Cuando se quiere aplicar una co-simulación se deben imponer los límites de precisión deseados y así definir un paso de tiempo lo suficientemente grande como para reducir los tiempos de cálculo, pero teniendo como limitante que la respuesta obtenida se encuentre en el rango de precisión.

Como ya se ha podido comprobar con lo mencionado anteriormente el acoplamiento que entrega mejores resultados es el p-d. Con dicho acoplamiento se realizaron distintas pruebas para poder comparar entre el esquema Jacobi y el Gauss-Seidel y comprobar cuál de ellos es más estable y preciso con distintos pasos de tiempo H cada vez mayores. En la Tabla 8 se muestra una comparativa de lo mencionado, utilizando como parámetro para medir la precisión el error que existe en la posición.

Tabla 8. Comparación en error de posición de esquemas de co-simulación realizados con método multi-rate y acoplamiento p-d.

Paso de comunicación H [ms]	Esquema	Error de posición [mm]
4	Jacobi	0.092
	G-S Mec. Primero	0.065
	G-S Hid. Primero	0.219
10	Jacobi	0.226
	G-S Mec. Primero	0.168
	G-S Hid. Primero	0.467
16	Jacobi	0.459
	G-S Mec. Primero	0.367
	G-S Hid. Primero	0.715

En la Tabla 8 se observa que el esquema más preciso es el Gauss-Seidel cuando se evalúa primero al subsistema de comportamiento dinámico más lento (el mecánico en este caso). Sin embargo el esquema Jacobi no posee una precisión excesivamente peor que el esquema mencionado, puesto que la mayor diferencia que existe entre ambos llega a ser, como máximo, de 0.1 mm en los casos estudiados. Por tanto, el esquema Jacobi con el acoplamiento p-d podría ser una opción aceptable dependiendo de la aplicación a simular. También se comprueba que el esquema que entrega la peor respuesta es el Gauss-Seidel cuando se evalúa primero el subsistema de respuesta dinámica más rápida (en este caso el hidráulico).

5 CONCLUSIONES

La co-simulación de sistemas mecánicos es una técnica de creciente interés en la industria y en la investigación debido a que reduce los costes y el tiempo requeridos en procesos de fabricación y acortan el ciclo de desarrollo del producto. La co-simulación también se utiliza para mantener la confidencialidad de datos sobre componentes y procesos en proyectos industriales en los que intervienen distintas entidades.

El principal objetivo de este trabajo es estudiar la precisión y la estabilidad que ofrecen los distintos métodos de co-simulación cuando se aplican al estudio de sistemas con componentes mecánicos. Al ser imposible definir un método de co-simulación óptimo que pueda aplicarse de modo general a cualquier sistema mecánico, se busca determinar principios generales que puedan emplearse para configurar adecuadamente los parámetros de la co-simulación en casos prácticos.

Para cumplir con dicho objetivo se realizaron pruebas con dos sistemas con comportamientos físicos muy diferentes para poder estudiar el efecto de los distintos métodos de co-simulación aplicados a sistemas lineales y no lineales. Los sistemas mencionados son: el oscilador lineal de dos grados de libertad y un manipulador de dos grados de libertad controlado con actuadores hidráulicos.

Se realizaron los programas en MATLAB para ambos sistemas escogidos de las distintas configuraciones de co-simulación consideradas importantes. Entre las distintas configuraciones se realizaron comparaciones para así llegar a conclusiones sobre los efectos de variar la configuración de la co-simulación en la precisión y estabilidad de los resultados:

- En ambos ejemplos se comprobó que es beneficioso utilizar un acoplamiento donde todos los subsistemas involucrados tienen una matriz de transmisión directa D igual a 0 . Esto quiere decir que los outputs de los subsistemas no dependen de sus inputs en el instante de tiempo donde intercambian las variables de acoplamiento. Si la matriz D es distinta de 0 se debe hacer uso de la extrapolación de los inputs del subsistema.
- La extrapolación introduce errores en la respuesta que se obtiene de la co-simulación. Sin embargo, si se halla el tipo de extrapolación que se adapte al comportamiento dinámico del sistema, entonces la extrapolación será una herramienta beneficiosa en la co-simulación. El inconveniente es que hallar la extrapolación adecuada para cada sistema a estudiar es realmente complejo.
- Para la grúa hidráulica se obtuvo que es más preciso y estable al utilizar el esquema Gauss-Seidel evaluar primero el subsistema de respuesta dinámica lenta.
- El esquema Jacobi según los resultados obtenidos suele tener un peor comportamiento que el esquema Gauss-Seidel. Aun así, cuando se utiliza un acoplamiento donde $D = 0$ el esquema Jacobi entrega resultados precisos y estables. El estudio de este esquema es necesario debido a que el esquema Gauss-Seidel es muchas veces complicado de aplicar como se explicó en la sección 2.1.2.
- El esquema Jacobi puede llegar a obtener resultados aún más precisos que el esquema Gauss-Seidel si se realizan las extrapolaciones correspondientes para cada uno de los subsistemas, al menos en sistemas con comportamiento lineal.

Esto se concluyó gracias al estudio realizado para el oscilador lineal de dos grados de libertad, donde se tenía una configuración en multi-rate con acoplamiento fuerza-desplazamiento. En dicha co-simulación se aplicaron las extrapolaciones de tipo FOH para ambos subsistemas y se encontró una solución que era aún más precisa en cuanto a energía que la solución monolítica del sistema.

- En general, el error debido a la interfaz de co-simulación aumenta si se incrementa el paso de tiempo de comunicación, H . En entornos de co-simulación donde todos los subsistemas verifican que $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ los procesos de integración son, por lo general, más estables, y puede incrementarse el paso de tiempo de comunicación H considerablemente sin comprometer en exceso la precisión de los resultados. Por el contrario, cuando los subsistemas poseen una matriz \mathbf{D} distinta de $\mathbf{0}$ el error en el que se incurre crece con mayor rapidez y el máximo paso de comunicación que se puede utilizar es, en general, más reducido.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. Gomes, C. Thule, D. Broman, P. G. Larsen, H. Vangheluwe, «Co-Simulation: A Survey,» *ACM Computing Surveys*, vol. 51, nº 3, p. Art. 49, 2018.
- [2] B. Schweizer, P. Li, D. Lu, T. Meyer, «Stabilized Implicit Cosimulation Method: Solver Coupling with Algebraic Constraints for Multibody Systems,» *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, vol. 11, nº 2, p. Art. 021002, 2016.
- [3] M. Arnold, C. Clauss, T. Schierz, «Error Analysis and Error Estimates for Co-Simulation in FMI for Model Exchange and Co-Simulation v2.0,» *The Archive of Mechanical Engineering*, vol. 60, nº 1, pp. 75-94, 2013.
- [4] F. González, M. A. Naya, A. Luaces, M. González, «On the Effect of Multirate Co-simulation Techniques in the Efficiency and Accuracy of Multibody System Dynamics,» de *Multibody System Dynamics*, 2011, pp. 25(4):461-483.
- [5] R. Kübler, W. Schiehlen, «Modular Simulation in Multibody System Dynamics,» *Multibody System Dynamics*, vol. 4, nº 2-3, pp. 107-127, 2000.
- [6] C. A. Felippa, K. C. Park, C. Farhat, «Partitioned Analysis of Coupled Mechanical Systems,» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pp. 3247-3270, 2001.
- [7] I. Hafner, N. Popper, «On the Terminology and Structuring of Co-Simulation Methods,» de *EOOLT'17, International Workshop on Equation-Based Object-Oriented Modeling Languages and Tools*, Wessling, Alemania, 2017.
- [8] F. González, S. Arbatani, A. Mohtat, J. Kövecses, «Energy-leak Monitoring and Correction to Enhance Stability in the Co-simulation of Mechanical Systems,» de *Mechanism and Machine Theory*, 2019, pp. 131:172-188.
- [9] M. Benedikt, J. Zehetner, D. Watzening, A. Hofer, «A Nearly Energy Preserving Coupling Element for Holistic Weak-Coupled System Co-simulations,» de *NAFEMS World Congress*, Salzburg, Austria, 2013.
- [10] S. Sadjina, L. T. Kyllingstad, S. Skjong, E. Pedersen, «Energy Conservation and Power Bonds in Co-Simulations: Non-Iterative Adaptive Step Size Control and Error Estimation,» *Engineering with Computers*, vol. 33, pp. 607-620, 2017.
- [11] M. Naya, J. Cuadrado, D. Dopico, U. Lührs, «An Efficient Method for the Combined Simulation of Multibody and Hydraulics Dynamics: Comparison with Simplified and Co-integration Approaches,» *The Archive of Mechanical Engineering*, vol. LVIII, nº 2, pp. 223-243, 2011.
- [12] J. Cuadrado, J. Cardenal, P. Morer, E. Bayo, «Intelligent Simulation of Multibody Dynamics: Space-State and Descriptor Methods in Sequential and Parallel Computing Environments,» *Multibody System Dynamics*, vol. 4, nº 1, pp. 55-73, 2000.
- [13] A. Peiret, F. González, J. Kövecses, M. Teichmann, «Multibody System Dynamics Interface Modelling For Stable Multirate Co-simulation of Multiphysics Systems,» *Mechanism and Machine Theory*, vol. 127, pp. 52-72, 2018.